

奥林匹克数学

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

初二分册

OLYMPIC MATHS

金 牌 教 练 教 你 学

奥林匹克数学

初二分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．初二分册/钱展望,朱华伟主编．—武汉：湖北教育出版社,2002

(奥林匹克数学系列丛书)

ISBN 7－5351－3141－7

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①钱…②朱…　Ⅲ．数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011180 号

出版　发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015　传真:027－83619605
邮购电话:027－83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本:850mm×1168mm　1/32　7.75 印张
版　次:2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字　数:188 千字　印数:1－10 000

ISBN 7－5351－3141－7/G·2547　定价:10.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛(1894年)。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月



钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国"五一"劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。



朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。



目 录

第一讲　因式分解(一)
——三种基本方法

知识点和方法述要

1.因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式的一种运算.它和整式乘法同为恒等变形,是乘法运算的逆运算.

因式分解的最终结果是惟一的,不仅必须是几个整式的乘积,还须分解到每个因式在有理数范围内不能再分解为止.两种仅仅因途径不同而导致数字差异的分解结果应被认为是一样的,如 $4x^2-1$ 可被分解为 $(2x-1)(2x+1)$,也可分解为 $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$.

2.提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法是因式分解的四种基本方法.本讲主要分析前面三种方法.

(1)一般地,分解因式的第一步是考虑可否直接提取公因式或经适当变形后提取公因式.若存在公因式则先施行提取公因式法提取公因式.显然这样做有利于进一步的因式分解.

提公因式法分解因式的关键在于正确找出公因式.公因式可以是单项式也可以是多项式.当某一项被作为公因式而整体提取后,不能漏写"1"而造成缺项.

(2)因式分解常用公式

(i) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

(ii) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

(iii) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(iv) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(v) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;

(vi) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$;

(ⅶ) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为正整数）；

(ⅷ) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为奇数）.

(3)（ⅰ）分组分解法是在多项式既无公因式，又不能运用公式分解时，通过分组，为下一步提取公因式，运用公式或采用其他方法分解做好准备的一种方法.

（ⅱ）在多项式乘法运算时，通过整理、化简，常将同类项合并为一项，或将两个仅符号相反的同类项相互抵消为零.作为多项式乘法的逆运算，在对某些多项式分解因式时，则需要把多项式中的某些项恢复为那些被合并或相互抵消的项，即把某一项拆成两项或多项，或在多项式中添上仅符号相反的项.通过这种拆项、添项为进一步施行分组分解法创造条件.

例 题 精 讲

例 1 分解因式：

(1) $x^6(x+y-z)^{2n+1}+y^6(z-y-x)^{2n+1}$；

(2) $-2x^{5n-1}y^n+4x^{3n-1}y^{n+2}-2x^{n-1}y^{n+4}$.

解 (1)原式 $=x^6(x+y-z)^{2n+1}-y^6(x+y-z)^{2n+1}$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x^6-y^6)$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

(2)原式 $=-2x^{n-1}y^n(x^{4n}-2x^{2n}y^2+y^4)$

$=-2x^{n-1}y^n(x^{2n}-y^2)^2$

$=-2x^{n-1}y^n(x^n+y)^2(x^n-y)^2$.

例 2 分解因式：$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$.

解 原式 $=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)][(c^2-b^2+d^2-$

$a^2) - 2(ab - cd)]$

$= [(c^2 - 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)][(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 + 2ab + b^2)]$

$= [(c-d)^2 - (a-b)^2][(c+d)^2 - (a+b)^2]$

$= (c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b).$

例 3 分解因式：$1 - 12x^2y^2 + 48x^4y^4 - 64x^6y^6$.

解 原式 $= 1 - 3\cdot 4x^2y^2 + 3\cdot(4x^2y^2)^2 - (4x^2y^2)^3$

$= (1 - 4x^2y^2)^3$

$= (1+2xy)^3(1-2xy)^3.$

注 注意观察、分析多项式中各项的字母及其指数、系数、符号的特征是进行因式分解的前提．

例 4 分解因式：$x^{15} + x^{14} + x^{13} + \cdots + x + 1$.

解一 原式 $= (x^{15} + x^{14}) + (x^{13} + x^{12}) + \cdots + (x+1)$

$= x^{14}(x+1) + x^{12}(x+1) + \cdots + (x+1)$

$= (x+1)(x^{14} + x^{12} + \cdots + 1)$

$= (x+1)[(x^{14} + x^{12}) + (x^{10} + x^8) + \cdots + (x^2+1)]$

$= (x+1)[x^{12}(x^2+1) + x^8(x^2+1) + x^4(x^2+1) + (x^2+1)]$

$= (x+1)(x^2+1)(x^{12} + x^8 + x^4 + 1)$

$= (x+1)(x^2+1)[x^8(x^4+1) + (x^4+1)]$

$= (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

解二 因

$x^{16} - 1 = (x-1)(x^{15} + x^{14} + \cdots + x + 1),$ ①

$x^{16} - 1 = (x^8-1)(x^8+1)$

$= (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$

$= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1),$ ②

比较①，②即知

原式 $= (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

注 例4解二不仅提供了一种巧妙的解答，而且表明因式分解常可采取不同途径，但最终结果应该是惟一的．一旦出现不同结果，一定存在某种结果不是问题的最终答案．

例5 分解因式：a^3+3a^2+3a+2.

解一 原式$=(a^3+3a^2+3a+1)+1$

$=(a+1)^3+1$

$=(a+2)[(a+1)^2-(a+1)+1]$

$=(a+2)(a^2+a+1)$.

解二 原式$=(a^3+2a^2)+(a^2+2a)+(a+2)$

$=(a+2)a^2+(a+2)a+(a+2)$

$=(a+2)(a^2+a+1)$.

解三 原式$=(a^3+a^2+a)+(2a^2+2a+2)$

$=a(a^2+a+1)+2(a^2+a+1)$

$=(a+2)(a^2+a+1)$.

解四 原式$=(a^3-1)+(3a^2+3a+3)$

$=(a-1)(a^2+a+1)+3(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a+2)$.

例6 分解因式：x^5+x+1.

解 原式$=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$

$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

例7 分解因式：$x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$.

解 原式$=x^3(a+1)-xy(x-y)[(a+1)-(b+1)]+y^3(b+1)$

$=x(a+1)[x^2-y(x-y)]+y(b+1)[y^2+x(x-y)]$

$=x(a+1)(x^2-xy+y^2)+y(b+1)(y^2+x^2-xy)$

$=(x^2-xy+y^2)(xa+yb+x+y)$.

例8 分解因式：$m^4+m^2-2mn-n^2+1$.

解 原式 $=(m^4+2m^2+1)-(m^2+2mn+n^2)$

$=(m^2+1)^2-(m+n)^2$

$=[(m^2+1)+(m+n)][(m^2+1)-(m+n)]$

$=(m^2+m+n+1)(m^2-m-n+1)$.

注 通过添、拆项构成一个完全平方式的方法称作配方法.通过配方,形成平方差,再运用平方差公式进行因式分解的方式常被采用.

例9 $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.

解 原式 $=(ab+cd)[(a^2-d^2)-(b^2-c^2)]+(ac+bd)[(a^2-d^2)+(b^2-c^2)]$

$=(ab+cd+ac+bd)(a^2-d^2)-(ab+cd-ac-bd)(b^2-c^2)$

$=(a-d)(a+d)(a+d)(b+c)-(b-c)(b+c)(b-c)(a-d)$

$=(a-d)(b+c)[(a+d)^2-(b-c)^2]$

$=(a-d)(b+c)(a+b-c+d)(a-b+c+d)$.

练 习 一

1.分解因式:

(1)$64x^6-y^6$;

(2)$\frac{1}{8}m^6-\frac{1}{729}m^3n^3$;

(3)$a^4x^2+8a^3x^3+16a^2x^4$;

(4)$a^{n-3}+a^n$;

(5)$16ax^2y^2-4a(x^2+y^2)^2$.

2.分解因式:

(1)$4x^2-4y^2+4x+1$;

(2)$x^2-xy+2yz-4z^2$;

(3)$5a^2mnp^2-5a^2m^3n+10a^2m^2n^2-5a^2mn^3$.

3.分解因式:

(1) x^4-7x^2+1;

(2) $4x^4+1$;

(3) a^3+6a-7.

4. 分解因式：

(1) $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$;

(2) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$;

(3) $x^2+(1+x)^2+(x+x^2)^2$;

(4) $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

第二讲　因式分解(二)
——换元法、待定系数法

知识点和方法述要

1.换元法又称变量替换法,指的是将一个较复杂的代数式中的某一部分看作一个整体,用一个新的字母加以替代,使问题得以转化,以便于问题解决.

2.待定系数法是种重要的解题方法.先确定所要求分解的式子具有某种分解的基本形式,而这种分解形式中含有若干待定的字母系数,再通过运用恒等式性质,或比较对应项系数,或取一些特殊值,列出方程或方程组,得到待定的字母系数值.从而完成因式分解,是待定系数法在因式分解中的主要运用方式.

例题精讲

例1　分解因式:

(1)$(x^2+2x+4)^2+5x(x^2+2x+4)+6x^2$;

(2)$(2y^2+3y+1)^2-22y^2-33y-1$.

解　(1)令 $y=x^2+2x+4$,则

原式 $=y^2+5xy+6x^2$

$=(y+2x)(y+3x)$

$=(x^2+2x+4+2x)(x^2+2x+4+3x)$

$=(x+2)^2(x^2+5x+4)$

$=(x+2)^2(x+1)(x+4)$.

(2)原式 $=(2y^2+3y+1)^2-11(2y^2+3y+1)+10$.

令 $m=2y^2+3y+1$,则

原式 $= m^2 - 11m + 10$.

$= (m-1)(m-10)$

$= (2y^2+3y+1-1)(2y^2+3y+1-10)$

$= (2y^2+3y)(2y^2+3y-9)$

$= y(2y+3)(2y-3)(y+3)$.

例 2 分解因式:$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

解一 令 $y = x^2 + x$,则

原式 $= (y+1)(y+2)-12$

$= y^2+3y-10$

$= (y-2)(y+5)$

$= (x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$= (x+2)(x-1)(x^2+x+5)$.

解二 令 $z = x^2 + x + \frac{3}{2}$,则

原式 $= (z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})-12$

$= z^2 - \frac{49}{4}$

$= (z-\frac{7}{2})(z+\frac{7}{2})$

$= (x^2+x+\frac{3}{2}-\frac{7}{2})(x^2+x+\frac{3}{2}+\frac{7}{2})$

$= (x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$= (x+2)(x-1)(x^2+x+5)$.

注 例 2 的解二中,令 $z = \frac{1}{2}[(x^2+x+1)+(x^2+x+2)]$,使乘积$(x^2+x+1)(x^2+x+2)$变换成平方差,这为后面的因式分解带来了便利.

例 3 分解因式:$(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$.

解 原式 $= (x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90$

$= [(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90$

$$=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90.$$

令 $y=2x^2+5x+2$,则

$$\begin{aligned}原式&=(y+1)y-90\\&=y^2+y-90\\&=(y-9)(y+10)\\&=(2x^2+5x-7)(2x^2+5x+12)\\&=(x-1)(2x+7)(2x^2+5x+12).\end{aligned}$$

例 4 分解因式:$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$.

解一

$$\begin{aligned}原式&=6(x^4+1)+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6[(x^2-1)^2+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6(x^2-1)^4+7x(x^2-1)-24x^2\\&=[2(x^2-1)-3x][3(x^2-1)+8x]\\&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)\\&=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).\end{aligned}$$

解二 原式 $=x^2[6(x^2+\frac{1}{x^2})+7(x-\frac{1}{x})-36]$.

令 $t=x-\frac{1}{x}$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$. 故

$$\begin{aligned}原式&=x^2[6(t^2+2)+7t-36]\\&=x^2(6t^2+7t-24)\\&=x^2(2t-3)(3t+8)\\&=x^2[2(x-\frac{1}{x})-3][3(x-\frac{1}{x})+8]\\&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)\\&=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).\end{aligned}$$

注 (1) 例 4 的解一中,虽然没有换元,实际上把 x^2-1 看作一个整体.当熟练使用换元法后,并非每题都要设置新元进行代换.

(2)若多项式中与首、末两项等距离的两项的系数均相等,则可如例 4 解二进行换元.

例 5 分解因式:$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

解 设 $u=x+y, v=xy$,则

原式 $=(v-1)^2+(u-2)(u-2v)$

$=(v+1)^2-2(v+1)u+u^2$

$=(v+1-u)^2$

$=(xy+1-x-y)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$.

注 例5中,x,y 处于同等地位,互换两字母位置,多项式保持不变,这样的多项式称为二元对称多项式.对于 x,y 的二元对称式,作换元:令 $u=x+y, v=xy$,化繁为简、改变形式是因式分解中一种常用的技巧.

例6 分解因式:$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

解 令 $m=ax-by, n=by-cz$,则 $ax-cz=m+n$.所以,有

原式 $=m^3+n^3-(m+n)^3$

$=m^3+n^3-[m^3+n^3+3mn(m+n)]$

$=-3mn(m+n)$

$=-3(ax-by)(by-cz)(ax-cz)$.

例7 分解因式:$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.

解 因 $x^2+xy-6y^2=(x-2y)(x+3y)$,可设

原式 $=(x-2y+m)(x+3y+n)$

$=x^2+xy-6y^2+(m+n)x+(3m-2n)y+mn$.

比较两边对应项系数,可得

$$\begin{cases} m+n=1, & ① \\ 3m-2n=13, & ② \\ mn=-6. & ③ \end{cases}$$

由①,②解得 $m=3, n=-2$. 代入③式,③式成立.故

原式 $=(x-2y+3)(x+3y-2)$.

例8 已知多项式 $x^4-x^3+6x^2-x+15$ 是二个二次三项式的乘积,试进行因式分解.

分析 依题设,可设

$$x^4-x^3+6x^2-x+15=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd,$$

比较对应项系数,可得

$$\begin{cases} a+c=-1, & ① \\ b+d+ac=6, & ② \\ ad+bc=-1, & ③ \\ bd=15. & ④ \end{cases}$$

由④知

$b=$	± 3	± 5	…
$d=$	± 5	± 1	…

(b,d 同号).

试取 $b=3, a=5$ 代入③得

$$5a+3c=-1. \quad ⑤$$

①,⑤联立解得 $a=1, c=-2$.

经检验,$a=1, b=3, c=-2, d=5$ 是上述方程组的一组解.因此,有

原式 $=(x^2+x+3)(x^2-2x+5)$.

注 由于图表中 b,d 可取情形不止一种,但因式分解的结果是惟一的,因此,可采取尝试的办法处理.

例9 如果 x^3-2x^2+ax-6 和 x^3+5x^2+bx+8 有二次公因式,试确定 a,b 的值.

解 依题设,可设

$$x^3-2x^2+ax-6=(x^2+px+q)(x+c),$$
$$x^3+5x^2+bx+8=(x^2+px+q)(x+d).$$

比较对应项的系数,有

$$\begin{cases} p+c=-2, & ① \\ cp+q=a, & ② \\ cq=-6, & ③ \\ p+d=5, & ④ \\ dp+q=6, & ⑤ \\ dq=8. & ⑥ \end{cases}$$

④－①得　$d-c=7$.　⑦

⑥－③得　$q(d-c)=14$.　⑧

由⑦,⑧得 $q=2$. 代入③,①,②得 $c=-3, p=1, a=-1$. 同理可得 $b=6$.

练 习 二

1. 分解因式:

(1) $(x^2+x-1)^2+(x^2+x-1)-2$;

(2) $(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)-2x^2y^2$;

(3) $(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$;

(4) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-6$;

(5) $(x^2-15x+54)(x^2+11x+28)+350$;

(6) $(x^2+4x+6)(x^2+6x+6)-3x^2$;

(7) $(x^2-x)^2+(x^2+3x+2)^2-4(x^2+x+1)^2$;

(8) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$.

2. 用待定系数法分解因式:

(1) $6x^2+7xy+2y^2-8x-5y+2$;

(2) $x^4-x^3+4x^2+3x+5$.

3. 求证: $x^2-2xy+y^2+x+y-4$ 不能分解为两个一次因式.

4. t 为何值时, 多项式 $x^2+7xy+ty^2-5x+43y-24$ 可以分解因式?

第三讲　因式分解(三)
——主元法

知 识 点 和 方 法 述 要

1.对含有多个字母的多项式按某个字母(主元)降幂排列,并视作关于这个字母(主元)的多项式进行分解的方法,我们称为主元法.

2.设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,$f(a)$表示用 a 代替 x 所得$f(x)$的值.

因式定理　如果 $f(a)=0$,则多项式 $f(x)$含有因式$(x-a)$;反之,若多项式 $f(x)$含有因式 $x-a$,则 $f(a)=0$.

证明　设 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r$(r 为常数,$q(x)$为多项式),则 $r=f(a)$.若 $f(a)=0$,则 $r=0$,$f(x)=(x-a)\cdot q(x)$.表明 $f(x)$含有因式 $x-a$;反之,$f(x)$含有因式 $x-a$,则 $r=0$,从而有$f(a)=0$.

3.(1) 一个代数式中,任意两个字母互换式子不变的代数式称做关于这些字母的对称式.对称多项式可分齐次与非齐次两类,次数相同的称为齐次,$a+b$,a^2+ab+b^2 等是关于 a,b 的齐次对称式,$a+b+c$,$a^3+b^3+c^3-3abc$ 是关于 a,b,c 的齐次对称多项式,而 $a^3+b^3+c^3-a-b-c$ 等则是 a,b,c 的非齐次对称多项式.

两个对称式的和、差、积、商仍是对称式.

(2)一个代数式中,把它所含的字母按某种顺序替换(如第一个字母换成第二个字母,第个二字母换成第三个字母,…如此替换,最后一个字母换成第一个字母)式子不变.这个代数式叫做这些字母的轮换对称式,简称轮换式.如$(a-b)(b-c)(c-a)$,$a^3b+b^3c+c^3a$等是关于 a,b,c 的齐次轮换式.

从定义可知对称式都是轮换式,但轮换式不一定是对称式.

两个轮换式的和、差、积、商仍是轮换式.

(3)对于对称式和其他轮换式常采用以下方法进行因式分解：先运用主元法和因式定理找出它的一个因式，进而利用对称式得出同型的另外一些因式，再运用待定系数法确定剩下的其他因式.

例 题 精 讲

例1 分解因式：

$$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6 .$$

分析 以 x 为主元，

原式 $=x^2+(3y+5)x+(2y^2+7y+6)$.

对于常数项而言，它是关于 y 的二次三项式，可用十字相乘法分解为

$$\begin{matrix} 2y & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 3 \\ y & & 2 \end{matrix}$$

即

$$2y^2+7y+6=(2y+3)(y+2) .$$

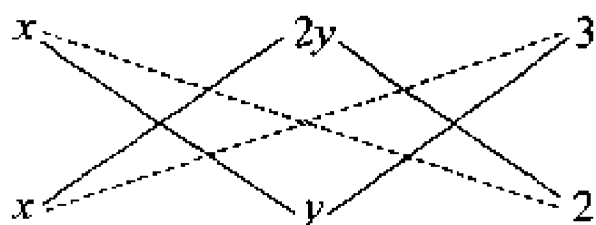
再次利用十字相乘法对视为 x 的二次三项式的原式进行分解：

$$\begin{matrix} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 2y+3 \\ x & & y+2 \end{matrix}$$

所以 原式 $=(x+2y+3)(x+y+2)$.

注 (1) 上述因式分解的过程中，实施了两次十字相乘法，故又称作双二相乘法. 把两个步骤中的十字相乘的图示合在一起，可得下图，它表示了以下三个关系式：

$(x+2y)(x+y)=x^2+3xy+2y^2$,



$$(x+3)(x+2)=x^2+5x+6,$$

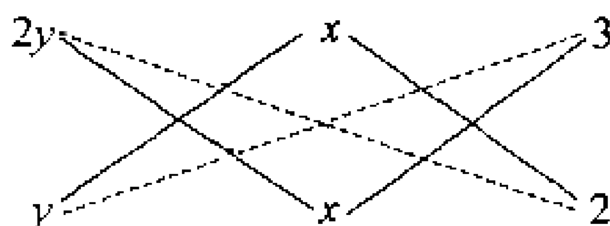
$$(2y+3)(y+2)=2y^2+7y+6.$$

(2)同样可以 y 为主元,

原式 $=2y^2+(3x+7)y+x^2+5x+6$

$=2y^2+(3x+7)y+(x+2)(x+3)$.

运用双十字相乘法,有



原式 $=(2y+x+3)(y+x+2)$.

(3)在运用双十字相乘法时,也可以作以下变换:

原式 $=(x+2y)(x+y)+5x+7y+6$

$=(x+2y+3)(x+y+2)$.

例2 分解因式:

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+2abc+ab-ac+b^2-c^2.$$

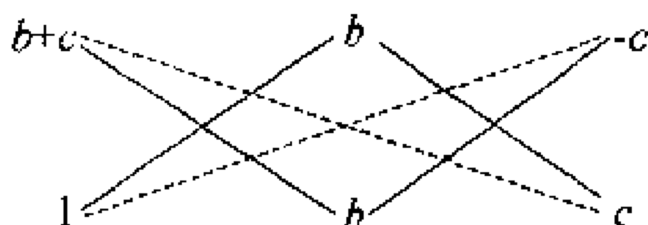
解 原式 $=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc+b-c)a+b^2-c^2$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc+b-c)a+(b+c)(b-c)$

$=[(b+c)a+(b-c)][a+(b+c)]$

$=(ab+ac+b-c)(a+b+c)$.

注 例2分解过程中施行了双十字相乘法,图示如下:



例 3 分解因式：$4x^2(a+b)^2-8xy(a+b)^3-5y^2(a+b)^4$.

解 原式 $=(a+b)^2[4x^2-8xy(a+b)-5y^2(a+b)^2]$

$$=(a+b)^2[2x-5y(a+b)][2x+y(a+b)]$$

$$=(a+b)^2(2x-5ay-5by)(2x+ay+by).$$

例 4 分解因式：$x^5+x^4-6x^3-3x^2+5x+2$.

分析 记 $f(x)=x^5+x^4-6x^3-3x^2+5x+2$. 因

$f(1)=1+1-6-3+5+2=0$,

$f(-1)=(-1)^5+(-1)^4-6(-1)^3-3(-1)^2+5\cdot(-1)+2=0$,

根据因式定理，$f(x)$含有因式 $x-1,x+1$，于是可作拆项分组：

$$\begin{aligned}f(x)&=x^5-x^3+x^4-x^2-5x^3+5x-2x^2+2\\&=x^3(x^2-1)+x^2(x^2-1)-5x(x^2-1)-2(x^2-1)\\&=(x^2-1)(x^3+x^2-5x-2)\\&=(x+1)(x-1)(x^3+x^2-5x-2).\qquad ①\end{aligned}$$

令 $g(x)=x^3+x^2-5x-2$，有

$$g(2)=2^3+2^2-5\times2-2=0.$$

故 $g(x)$含有因式 $x-2$，再作拆项分组：

$$\begin{aligned}g(x)&=x^3-2x^2+3x^2-6x+x-2\\&=x^2(x-2)+3x(x-2)+(x-2)\\&=(x-2)(x^2+3x+1).\qquad ②\end{aligned}$$

由①，②得

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+3x+1).$$

注 (1)例 4 中根据因式定理探知 $f(x)$含有因式 $x-1,x+1,x-2$ 后可逐次施行综合除法得到剩下的因式.

(2)由例 4 可以看出当 $f(x)$的系数和为 0 时含有因式 $x-1$；当 $f(x)$奇数项系数的和与偶数项系数的和相等时含有因式 $x+1$.

例 5 分解因式：$(x+y)^5-x^5-y^5$.

解 将原式视作关于 x 的多项式$f(x)$. 由 $f(0)=0$，可知 $f(x)$含有因式 x，又

$$f(-y)=(-y+y)^5-(-y)^5-y^5=0,$$

可知 $f(x)$ 含有因式 $x+y$.

因原式是关于 x,y 的对称式,故可设

原式 $=xy(x+y)[k(x^2+y^2)+lxy]$.

取 $x=y=1$,有

$$30=2(2k+l), \quad ①$$

取 $x=2,y=-1$,有

$$-30=-2(5k-2l). \quad ②$$

由①,②解得 $k=5,l=5$,所以

原式 $=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$.

例 6 分解因式:$x^3+y^3+z^3-3xyz$.

分析 原式为关于 x,y,z 的三次齐次对称式,可视作关于 x 的多项式.

令 $x=-y-z$,则

原式 $=(-y-z)^3+y^3+z^3-3(-y-z)yz$

$=-(y+z)^3+y^3+z^3+3yz(x+y)$

$=0$.

根据因式定理知原式有因式 $x+y+z$,另一因式必为二次齐次对称式,可设

原式 $=(x+y+z)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$.

比较 x^3,x^2y 的系数,即知 $k=1,l=-1$.因此,

原式 $=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

例 7 分解因式:$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$.

分析 原式是关于 x,y,z 的四次轮换式,可视作以 x 为主元的多项式.

当 $x=y$ 时,

原式 $=y^2(y^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zy(z^2-y^2)=0$,

故原式含有因式 $x-y$.由对称性知 $y-z,z-x$ 也是原式的因式.因此,剩下的因式必为 $x+y+z$.

设原式 $=k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$,比较 y^3z,即知 k

$=-1$,所以

原式 $=-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$.

例 8 分解因式:

$a^3(a+1)(b-c)+b^3(b+1)(c-a)+c^3(c+1)(a-b)$.

分析 原式为非齐次轮换式,可视作以 a 为主元的多项式.

当 $a=b$ 时,原式 $=0$. 所以 $a-b$ 是原式的一个因式. 由对称性知 $b-c, c-a$ 也是原式的因式. 剩下的因式应是非齐次对称性. 设

原式 $=(a-b)(b-c)(c-a)[k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)+m(a+b+c)+n]$.

令 $a=0, b=1, c-1$ 得

$$2k-l+n=-1. \quad ①$$

令 $a=0, b=2, c=-2$,得

$$8k-4l+n=-4. \quad ②$$

令 $a=0, b=1, c=2$,得

$$5k+2l+3m+n=-10. \quad ③$$

令 $a=0, b=1, c=-2$,得

$$5k-2l-m+n=-2. \quad ④$$

联立①,②,③,④解得 $k=-1, l=-1, m=-1, n=0$,所以

原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c)$.

例 9 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边边长. 求证:

$a^3+b^3+c^3-a(b-c)^2-b(c-a)^2-c(a-b)^2-4abc<0$.

证明 记 $f(a)=a^3+b^3+c^3-a(b-c)^2-b(c-a)^2-c(a-b)^2-4abc$,则

$$\begin{aligned}f(b+c)&=(b+c)^3+b^3+c^3-(b+c)(b-c)^2-b^3-c^3-4(b+c)bc\\&=(b+c)[(b+c)^2-(b-c)^2-4bc]\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $b+c-a$ 是 $f(a)$ 的因式. 因 $f(a)$ 是关于 a, b, c 的轮换对称式,故 $c+a-b, a+b-c$ 也是 $f(a)$ 的因式. 可设

$$f(a)=k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

比较 a^3 的余数,可知 $k=-1$,故

$$f(a)=-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

由于 a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三边,故 $a+b>c,b+c>a,c+a>b$,从而有 $f(a)<0$.命题获证.

练 习 三

1.分解因式:

(1)$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$;

(2)$x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$.

2.分解因式:

(1)$2x^3-x^2+x+4$;

(2)$x^3-19xy^2-30y^3$;

(3)$x^3+3px^2+(3p^2-q^2)x+p(p^2-q^2)$.

3.(1)证明:如果 $x=\dfrac{b}{a}$ 时,多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的值为零,则 $ax-b$ 为这个多项式的因式.

(2)分解因式:$2x^3-7x^2-3x+18$.

4.分解因式:

(1)$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$;

(2)$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$.

5.设 $P=(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n-1}-z^{2n+1}$($n$ 为正整数),$Q=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz$,试证明 Q 是 P 的因式.

第四讲　因式分解的简单应用

知识点和方法述要

因式分解是一种十分重要的恒等变形，是解决许多数学问题的有力工具. 本讲只简单涉及简便计算、整除、多项式的化简、求值、条件恒等式证明等方面问题，但各种问题灵活多变、富于启发，对拓宽思路，提高驾驭所学因式分解的知识和方法分析问题和解决问题的能力是非常有益的.

例题精讲

例 1　计算：

(1) $\dfrac{2001^3-2\times 2001^2-1999}{2001^3+2001^2-2002}$；

(2) $\dfrac{(2\times 5+2)(4\times 7+2)(6\times 9+2)\cdots(2000\times 2003+2)}{(1\times 4+2)(3\times 6+2)(5\times 8+2)\cdots(1999\times 2002+2)}$.

解　(1)令 $m=2001$，则

$$\text{原式}=\frac{m^3-2m^2-(m-2)}{m^3+m^2-(m+1)}$$
$$=\frac{m^2(m-2)-(m-2)}{m^2(m+1)-(m+1)}$$
$$=\frac{(m-2)(m^2-1)}{(m+1)(m^2-1)}$$
$$=\frac{m-2}{m+1}=\frac{2001-2}{2001+1}=\frac{1999}{2002}.$$

(2)因　$n(n+3)+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$，

故　$\text{原式}=\dfrac{(3\times 4)(5\times 6)(7\times 8)\cdots(2001\times 2002)}{(2\times 3)(4\times 5)(6\times 7)\cdots(2000\times 2001)}$

$$=\frac{2002}{2}=1001.$$

例 2 求证:任意四个连续正整数之和加 1 为一个完全平方数.

证明 设四个连续正整数分别为 $n,n+1,n+2,n+3$,则

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\=&(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\=&(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\=&(n^2+3n+1)^2,\end{aligned}$$

为一完全平方数.

例 3 证明:具有如下性质的正整数 a 有无穷多个:对于任意的正整数 n, $z=n^4+a$ 都是合数.

分析 关键在于寻求某类正整数 a 使与 n^4 都能分解为两个大于 1 的正整数之积.注意到 n^4,根据对称性,联想到

$$\begin{aligned}x^4+4y^4&=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2\\&=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2\\&=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2),\end{aligned}$$

可取 $x=n$, $a=4k^4$(k 为正整数).此时

$$\begin{aligned}n^4+4k^4&=(n^2-2nk+2k^2)(n^2+2nk+2k^2)\\&=[(n-k)^2+k^2](n^2+2nk+2k^2).\end{aligned}$$

若 $k>1$,有 $(n-k)^2+k^2>1$, $n^2+2nk+2k^2>1$, n^4+a 为合数.因存在无穷多个大于 1 的正整数 k,故存在无穷多个正整数 a,使 n^4+a 对一切正整数 n 都是合数.

例 4 已知 a,b,c 为互不相等的数,且

$$(a-c)^2-4(b-a)(c-b)=0, \qquad ①$$

求证:$2b=a+c$.

证明 由①得

$$\begin{aligned}&a^2-2ac+c^2-4bc+4ac-4ab+4b^2\\=&(a+c)^2-4b(a+c)+4b^2\\=&(a+c-2b)^2=0.\end{aligned}$$

所以 $$a+c-2b=0,$$
即 $$2b=a+c.$$

例 5 设 $a+b+c=3m$，试求 $(m-a)^3+(m-b)^3+(m-c)^3-3(m-a)(m-b)(m-c)$ 的值.

解 令 $p=m-a, q=m-b, r=m-c$，则

$$\begin{aligned}p+q+r&=(m-a)+(m-b)+(m-c)\\&=3m-(a+b+c)=0.\end{aligned} \quad ①$$

又 $$(m-a)^3+(m-b)^3+(m-c)^3-3(m-a)(m-b)(m-c)$$
$$=p^3+q^3+r^3-3pqr$$
$$=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp). \quad ②$$

由①,②可知

$(m-a)^3+(m-b)^3+(m-c)^3-3(m-a)(m-b)(m-c)=0.$

例 6 若 m,n,p 都是正整数，求证：$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 能被 x^2+x+1 整除.

证明 因

$$\begin{aligned}&x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}\\&=[(x^3)^m-1]+x[(x^3)^n-1]+x^2[(x^3)^p-1]+x^2+x+1\\&=(x^3-1)(x^{3m-3}+x^{3m-6}+\cdots+x^3+1)+x(x^3-1)(x^{3n-3}+\\&\quad x^{3n-6}+\cdots+x+1)+x^2(x^3-1)(x^{3p-3}+x^{3p-6}+\cdots+x^3+1)\\&\quad+x^2+x+1\\&=(x^2+x+1)[(x-1)(x^{3m-3}+\cdots+1)+x(x-1)(x^{3n-3}+\cdots\\&\quad+1)+x^2(x-1)(x^{3p-3}+\cdots+1)+1],\end{aligned}$$

所以 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 可被 x^2+x+1 整除.

例 7 若 m,n,p,q 为正整数，且 $mn+pq$ 是 $m-p$ 的倍数，求证：$mq+np$ 也是 $m-p$ 的倍数.

证明 因 m,n,p,q 为正整数，故

$$\begin{aligned}&(mn+pq)-(mq+np)\\&=n(m-p)-q(m-p)\end{aligned}$$

$$=(m-p)(n-q)$$

是 $m-p$ 的倍数.依题设知 $mn+pq$ 是 $m-p$ 的倍数,所以 $mq+np$ 也是 $m-p$ 的倍数.

例8 对正整数 $x,y,(x,y)$ 称为一个数组,规定数组 (x,y) 与数组 (y,x) 是相同的数组.若两个数组满足以下条件:任意一个数组中的两个数的和等于另一个数组中的两个数的积,则称这两个数组为“相伴数组”,除(2,2)与(2,2)以外求其余的“相伴数组”.

解 设“相伴数组”为 (a,b) 与 (c,d),且不妨设 $a\geqslant b,c\geqslant d$,则

$$\begin{cases} a+b=cd, & ① \\ c+d=ab. & ② \end{cases}$$

由①,②得

$$ab+cd=a+b+c+d,$$

即
$$(a-1)(b-1)+(c-1)(d-1)=2. \quad ③$$

因 a,b,c,d 为正整数,由③可得

$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=2,\\(c-1)(d-1)=0;\end{cases} \quad (\text{Ⅰ})$$

或
$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=1,\\(c-1)(d-1)=1;\end{cases} \quad (\text{Ⅱ})$$

$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=0,\\(a-1)(d-1)=2.\end{cases} \quad (\text{Ⅲ})$$

由(Ⅰ)得 $a=3,b=2,d=1,c=5$;

由(Ⅱ)得 $a=b=c=d=2$;

由(Ⅲ)得 $a=5,b=1,c=3,d=2$.

综上所述,除(2,2)与(2,2)以外的“相伴数组”是(5,1)与(3,2).

例9 $n(>1)$名运动员参加乒乓球循环赛,每两人之间正好只进行一场比赛.在循环过程中,第一位参赛者胜 x_1 场、负 y_1 场,第二位参赛者胜 x_2 场、负 y_2 场,…,第 n 位参赛者胜 x_n 场、负 y_n 场.求证:$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

证明 依题设,每一名运动员都参加了 $n-1$ 场比赛,即

$$x_i + y_i = n - 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

由于每一场比赛总有一人胜，一人负，故

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

于是

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)\\
&= (x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2) + \cdots + (x_n^2 - y_n^2)\\
&= (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + \cdots + (x_n + y_n)(x_n - y_n)\\
&= (n - 1)[(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n)]\\
&= (n - 1)[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

练 习 四

一、选择题

1. 对于任何整数 m，多项式 $(4m+5)^2-9$ 都能　　(　　).

(A)被 8 整除　　(B)被 16 整除

(C)被 3 整除　　(D)被 5 整除

2. 若整数 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$，且 a 为素数，则 b,c 两数应　　(　　).

(A)同为奇数　　(B)同为偶数

(C)一奇一偶　　(D)同为合数

3. 如果多项式 $2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$ 的值为零，则 x 与 y 之间的关系是　　(　　).

(A)相等　　(B)互为倒数

(C)互为相反数　　(D)以上三种都不成立

二、填空题

4. $998^2-4=$ ______.

5. $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{1999^2})(1-\frac{1}{2000^2})=$______.

6. 当 $x-3y+4z=1, 2x+y-2z=2$ 时，化简 $x^2-2xy-3y^2+2xz+10yz-8z^2$ 的结果是______.

7. 若多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 含有因式 $x-2$ 与 $x-1$，则 $mn=$______.

三、解答题

8. 已知 3^n+m 能被 13 整除，求证：$3^{n+3}+m$ 也能被 13 整除（m 为整数，n 为正整数）.

9. 试问：对于哪些自然数 n，$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ 是合数?

10. 证明：多项式 $(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)+10$ 的值恒大于零.

11. 设有多项式

$$P=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2,$$

求证：若 $p^2-4q-4(m+1)=0$，则 P 是一个二次三项式的平方.

12. 求证：$(7-x)(3-x)(4-x^2)$ 的值不大于 100.

第五讲　分　式

知识点和方法述要

1.(1)若把两个整式 A、B 的商写成$\frac{A}{B}$的形式，在整式 B 中含有字母时，则称式子$\frac{A}{B}$是分式.其中，分子 A 中不一定含有字母，而分母 B 中必须含有字母.

(2)只有在分式的分母值不等于零时，分式才有意义.分式的值为零等价于分子的值为零且分母的值不为零.

(3)分式的分类类似于分数.分子的次数小于分母次数的分式称为真分式，而分子的次数不小于分母的次数的分式称为假分式.当分式的分子、分母都是整式且公因式为 1 时，称它为最简分式或既约分式.当分子 A 与分母 B 中至少有一也是分式时，称它为繁分式.

(4)整式与分式统称为有理式.

2.分式的基本性质是

$$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM}(M\neq 0).$$

它是分式运算的重要依据.

3.(1)把一个分式的分子与分母的公因式约去叫做分式的约分.

(2)把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相同的同分母的形式，叫做分式的通分.

(3)分式的基本性质、分式的约分与通分、分式的四则运算等都与分数相应内容类似.约分常需先对分式的分子、分母分别因式分解，为约分创造条件.通分的关键是确定几个分式的公分母.要注意分析分式的结构特征，灵活地采用分步通分、分组通分等多种方式.

例 题 精 讲

例 1 当 x 为何值时，$\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5|x|+6}$的值为零？

解 原式的值为零应同时满足

$$\begin{cases} x^2-x-2=0, & ① \\ x^2-5|x|+6\neq 0. & ② \end{cases}$$

由①得 $$(x-2)(x+1)=0, \quad ③$$

由②得 $$(|x|-2)(|x|-3)\neq 0. \quad ④$$

由③，④可知 $x=-1$.

例 2 计算

$$1-\left[\frac{2x^3}{x-1}-(x^2+x+1)\right]\cdot\frac{x^2-1}{(x-1)^2+x}\div(x^2-2x-3).$$

解 原式 $=1-\dfrac{2x^3-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}$

$$=1-\frac{2x^3-(x^3-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2-x+1}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$=1-\frac{x^3+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^3-x+1}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$=1-\frac{x+1}{x-3}$$

$$=\frac{(x-3)-(x+1)}{x-3}$$

$$=-\frac{4}{x-3}.$$

注 进行分式的四则运算时要注意运算顺序.

例 3 已知，对任意 x，有

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+x+3}, \quad ①$$

试确定 A,B,C.

解一 $\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{x+4}{(x^3-1)+2(x-1)}$

$$=\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}$$

$$=\frac{(x^2+x+3)-(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x+3)}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}. \qquad ②$$

由①,②知 $A=1,B=C=-1$.

解二 由①得

$$x+4=A(x^2+x+3)+(x-1)(Bx+c). \qquad ③$$

令 $x=1,0,-1$,由③可得

$$\begin{cases}5A=5,\\3A-C=4,\\3A+2B-2C=3.\end{cases}$$

解得 $A=1,B=C=-1$.

例4 计算$\dfrac{a^3-2a^2-9a+21}{a^2-5a+6}-\dfrac{a^3-a^2-4a+1}{a^2-3a+2}$.

解 原式$=[(a+3)+\dfrac{3}{(a-2)(a-3)}]$

$$-[(a+2)-\frac{3}{(a-1)(a-2)}]$$

$$=(a+3)-(a+2)+\frac{3}{a-2}(\frac{1}{a-3}+\frac{1}{a-1})$$

$$=1+\frac{3}{a-2}\cdot\frac{2(a-2)}{(a-1)(a-3)}$$

$$=1+\frac{6}{(a-1)(a-3)}=\frac{a^2-4a+9}{a^2-4a+3}.$$

例5 计算

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}.$$

解 原式 $=\frac{2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

$=\frac{2x\cdot 2x^2}{a^4-x^4}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

$=\frac{4x^3\cdot 2x^4}{a^8-x^8}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

$=0.$

例 6 计算

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}.$$

解 原式 $=\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$=\frac{4}{x^2-4}.$

注 注意将分式运算与分数运算相类比.

例 7 计算

$$\frac{(x-y)(x-z)}{(x+y-2z)(x+z-2y)}+\frac{(y-z)(y-x)}{(y+z-2x)(y+x-2z)}+\frac{(z-x)(z-y)}{(z+x-2y)(z+y-2z)}.$$

分析 原式关于 x,y,z 轮换对称,更进一步,

$$原式=\frac{(x-y)(x-z)}{[(y-z)-(z-x)][(x-y)-(y-z)]}+\frac{(y-z)(y-x)}{[(z-x)-(x-y)][(y-z)-(z-x)]}+\frac{(z-x)(z-y)}{[(x-y)-(y-z)][(z-x)-(x-y)]}. \quad ①$$

上式关于 $x-y, y-z, z-x$ 轮换对称.因此,进行换元,简化结构:设 $x-y=a, y-z=b, z-x=c$,由①得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{-ac}{(b-c)(a-b)} + \frac{-ba}{(c-a)(b-c)} + \frac{-cb}{(a-b)(c-a)} \\
&= -\frac{ac(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= -\frac{ac^2-a^2c+a^2b-ab^2+cb^2-bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= -\frac{c^2(a-b)+ab(a-b)+c(b^2-a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= -\frac{(a-b)(ab-bc-ca+c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= -\frac{(a-b)[b(a-c)-c(a-c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= -\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= 1 .
\end{aligned}
$$

例 8 已知 $a=\frac{7}{13}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{5}{39}$,试求

$$
\frac{a^2(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+b^2(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})+c^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}{a(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}
$$

的值.

解 原式 $=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}$.

分子、分母都是关于 a, b, c 的轮换对称式.

对于分子,当 $a=b$ 时,式子等于零,可见分子含因式 $(a-b)$.同样分子含有因式 $b-c, c-a$.设

$a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

令 $a=0, b=1, c=2$,由上式可得 $k=1$.所以

分子 $=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

同理　分母 $=(a-b)(b-c)(c-a)$.

所以　原式 $=a+b+c$.

当 $a=\frac{7}{13}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{5}{39}$ 时,

原式 $=\frac{7}{13}+\frac{1}{3}+\frac{5}{39}=\frac{21+13+5}{39}=1$.

例9　计算

$$\frac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})(8^4+\frac{1}{4})(10^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})(7^4+\frac{1}{4})(9^4+\frac{1}{4})}.$$

解　$a^4+\frac{1}{4}=(a^4+a^2+\frac{1}{4})-a^2$

$$=(a^2+\frac{1}{2})^2-a^2$$

$$=(a^2+a+\frac{1}{2})(a^2-a+\frac{1}{2})$$

$$=[(a+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}][(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]. \qquad ①$$

令 $a=1,2,\cdots,10$,由①得

原式 $=\frac{[(\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}][(\frac{5}{2})^2+\frac{1}{4}][(\frac{7}{2})^2+\frac{1}{4}]\cdots[(\frac{21}{2})^2+\frac{1}{4}]}{[(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}][(\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}][(\frac{5}{2})^2+\frac{1}{4}]\cdots[(\frac{19}{2})^2+\frac{1}{4}]}$

$=\frac{(\frac{21}{2})^2+\frac{1}{4}}{(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$

$=\frac{441+1}{2}$

$=221$.

练　习　五

一、选择题

1. 若分式$\frac{4x-3}{|x|+2}$的值是负数，则 x 的取值范围是 (　　).

(A) $x \geq \frac{3}{4}$　　(B) $x < \frac{3}{4}$

(C) $x \neq \frac{3}{4}$　　(D) $x > -2$

2. 已知$\frac{1}{a} < -1$，则 (　　).

(A) $a < -1$　　(B) $-1 < a < 0$

(C) $0 < a < 1$　　(D) $a > 1$

3. 分式$\frac{6x^2+12x+10}{x^2+2x+2}$的最小值是 (　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 不存在

4. 当 $a < b < c$ 时，$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$为 (　　).

(A) 正数　　(B) 负数　　(C) 0　　(D) 不能确定

二、填空题

5. 化简$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}$后，得______.

6. 化简$[\frac{4ab}{a+b}+(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})\div(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})]\div(a^2+2ab+b^2)$后，得______.

7. 化简$(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2})(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1})-\frac{8}{a+1}$后，得______.

8. 当 $a=1, b=2$ 时，$\frac{1-\frac{3a}{b}+\frac{3a^2}{b^2}-\frac{a^3}{b^3}}{a^2-2ab+b^2}$的值是______.

三、解答题

9. 计算：$\frac{x^6}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\frac{x^7}{1-x^8}$.

10. 化简：$(x+\frac{1}{x})^2-(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x-\frac{1}{x}})^2\div$

$$\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}+3}{x^2+\frac{1}{x^2}-2x-\frac{2}{x}+3}.$$

11. 若对任意 x，有

$$\frac{ax-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{b}{x+m}+\frac{cx+5}{x^2+n},$$

且上式中每个分式都是既约分式，a,b,c,m,n 为常数. 试求 $a+b+c$ 的值.

12. 计算

$$\frac{b-c}{(a-b)(b-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}.$$

第六讲　可化为一次方程(组)的分式方程

知识点和方法述要

1. 分母中含有未知数的方程称为分式方程.

2. 解分式方程一般经历去分母、化分式方程为整式方程并解这个整式方程、验根等三个步骤. 但不少方程的求解应视方程的具体情形而作特殊处理. 如将方程两边化为分子(或分母)相等的方式,将问题简化为求解由分母(或分子)相等构成的新方程,又如分式分子(整式)的次数不低于分母(整式)的次数时注意将分式分拆为一个整式与分式的和,以便简化计算.

3. 分式方程中的各个分式的未知数都有各自的取值范围,这些取值范围的公共部分就是分式方程的未知数允许的取值范围. 只能在这个取值范围中求方程的根.

当分式方程转化为整式方程后,有两种可能情形:

(i)整式方程的根都在分式方程的未知数取便范围内,那么整式方程的根都是分式方程的根.

(ii)整式方程的根有的不在分式方程的未知数的取值范围内,那么这种根就不是分式方程的根,而是增根.

由于产生增根的原因是分式方程两边同乘以最简公分母扩大了未知数取值范围,因此,只要把根代入最简公分母,看值是否为零就可以了.

4. 应用分式方程(组)解应用题的主要步骤和运用整式方程(组)类似,仅仅多出检验增根这一步(但都要检验是否符合题目中包含的实际意义). 要注意如何用未知数 x 和已知数将问题相关的量表示出来,并善于使用列表、画图等辅助手段分析问题.

例 题 精 讲

例 1 解方程

$$\frac{x+4}{x+1}+\frac{2x+3}{x+2}=\frac{3x^2+10x}{x^2+3x+2}.$$

解 原方程可变为

$$1+\frac{3}{x+1}+2-\frac{1}{x+2}=3+\frac{x-6}{x^2+3x+2},$$

即
$$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x-6}{(x+1)(x+2)},$$

去分母,得
$$3(x+2)-(x+1)=x-6.$$

解得 $x=-11$. 经检验 $x=-11$ 是原方程的根.

例 2 解方程

$$\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}.$$

解 原方程可变为

$$\frac{2}{x+8}-\frac{3}{x+15}=\frac{4}{x+6}-\frac{5}{x+9},$$

即
$$\frac{6-x}{(x+8)(x+15)}=\frac{6-x}{(x+6)(x+9)}. \quad ①$$

若 $6-x=0$,则 $x=6$

若 $6-x\neq0$,则由①得

$$\frac{1}{(x+8)(x+15)}=\frac{1}{(x+6)(x+9)}.$$

进而得
$$x^2+15x+54=x^2+23x+120,$$

有
$$8x=-66.$$

所以 $x=-\frac{33}{4}$.

经检验,$x=6,x=-\frac{33}{4}$都是原方程的解.

例 3 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x+y}+\dfrac{x-y}{3}=11\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{15}{x+y}-\dfrac{x-y}{2}=-2.\end{cases}$$

解 设$\dfrac{1}{x+y}=m, x-y=n$,原方程组可变为

$$\begin{cases}10m+\dfrac{n}{3}=\dfrac{34}{3},\\ 15m-\dfrac{n}{2}=-2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}30m+n=34,\\ 30m-n=-4.\end{cases}$$

解得 $m=\dfrac{1}{2}, n=19$. 于是,有

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2},$$

即 $$x+y=2. \quad ①$$

及 $$x-y=19. \quad ②$$

由①,②解得$\begin{cases}x=10\dfrac{1}{2},\\ y=-8\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

例 4 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{8}{15}, & ①\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4}{5}. & ②\end{cases}$$

解 ①×3-②×2,消去常数项,得

$$\frac{5}{x+y}+\frac{3}{x-y}-\frac{2}{y}=0.$$

去分母,得

$$5(x-y)y+3(x+y)y-2(x+y)(x-y)=0,$$

即 $$x(4y-x)=0.$$

当 $x=0$ 时,②式不成立,所以 $x=4y$,代入②得

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{4y}=\frac{4}{5}.$$

解得 $y=1$.进而有 $x=4$.

经检验$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$是原方程组的解.

例 5 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2},\\[2mm]\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3},\\[2mm]\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

解 原方程组可变为

$$\begin{cases}\dfrac{x+y+z}{x(y+z)}=\dfrac{1}{2},\\[2mm]\dfrac{x+y+z}{y(z+x)}=\dfrac{1}{3},\\[2mm]\dfrac{x+y+z}{z(x+y)}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

令 $k=x+y+z$,并取倒数,上述方程组可变为

$$\begin{cases}xy+xz=2k, & ①\\yz+yx=3k, & ②\\zx+zy=4k. & ③\end{cases}$$

①,②,③相加得

$$xy+yz+zx=\frac{9}{2}k. \qquad ④$$

④分别减去①,②,③得

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2}k, & ⑤ \\ yz = \frac{5}{2}k, & ⑥ \\ zx = \frac{3}{2}k. & ⑦ \end{cases}$$

显然 x, y, z 都不为 0，且 $k \neq 0$.

⑦÷⑥得 $$\frac{x}{y} = \frac{3}{5},$$

⑤÷⑥得 $$\frac{x}{z} = \frac{1}{5}.$$

所以 $$x:y:z = 3:5:15.$$

又 $$x + y + z = k,$$

所以 $x = \frac{3k}{23}, y = \frac{5k}{23}, z = \frac{15k}{23}$. 代入⑤得

$$\left(\frac{3k}{23}\right)\left(\frac{5k}{23}\right) = \frac{k}{2}.$$

解得 $k = \frac{23^2}{30}$. 进而得 $x = \frac{23}{10}, y = \frac{23}{6}, z = \frac{23}{2}$.

经检验，$x = \frac{23}{10}, y = \frac{23}{6}, z = \frac{23}{2}$ 是原方程组的解.

例 6 有甲、乙两台打麦机，甲机的工作效率是乙机的 2 倍. 先用甲机打完全部麦子的 $\frac{2}{3}$，然后用乙机继续打完，所需时间比同时用两台打麦机打完全部麦子所需时间多 4 天. 问分别用一台打麦机打完所有的麦子各需要多少天?

解 设全部工作量为 1，乙机的效率为 x，则甲机的效率为 $2x$. 依题设，有

$$\frac{\frac{2}{3}}{2x} + \frac{\frac{1}{3}}{x} - 4 = \frac{1}{2x + x}.$$

即 $$\frac{1}{3x} = 4.$$

解得 $x=\frac{1}{12}$，经检验 $x=\frac{1}{12}$是原方程的根.

因乙机的工作效率为$\frac{1}{12}$，故乙机单独打完全部麦子需要 12 天.甲机的工作效率是乙机的 2 倍，故甲机单独打完全部麦子需要 6 天.

例 7 总站每隔一定时间发车一次，有人在街上以固定速度行走，发现从背后每隔 6 分钟开过来一辆汽车，而迎面每隔 $4\frac{2}{7}$分钟有一辆汽车驶来.问总站每隔多少时间发一辆车？

分析 设总站每隔 x 分钟发一辆车，如图 6-1.



图 6-1

若人在 A 处正好有一辆车开过，对于 A 处而言必须再等 x 分钟后才又有一辆车从背后开来.但 x 分钟后，人已走到 B 处，此时后一辆车已到 A 处，它与人一起向前行走，并在 C 处追上人.依题设知人由 A 到 C 花了 6 分钟，而从 B 到 C 则花了$(6-x)$分钟，这与汽车从 A 到 C 花的时间相等，于是

$$\frac{\text{汽车的速度}}{\text{人的速度}}=\frac{6}{6-x}. \qquad ①$$

另一方面，如图 6-2，若人在 D 处时迎面有一辆车开过，设再过 x 分钟才到达 D 的后一辆车正在 F 处，则 DF 这段路程汽车需走 x 分钟.当人继续前进时，汽车也从 F 与人相向而行.依题设，人走了 $4\frac{2}{7}$分钟在 E 处与车相遇.因为车从 F 到 D 需要 x 分钟.相遇时已用 $4\frac{2}{7}$分钟，所以车从 E 到 D 只剩下$(x-4\frac{2}{7})$分钟.于是，

$$\frac{\text{汽车的速度}}{\text{人的速度}}=\frac{4\frac{2}{7}}{x-4\frac{2}{7}}. \qquad ②$$

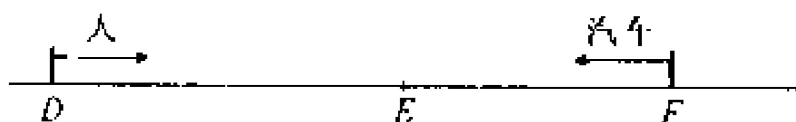


图 6－2

由①,②得
$$\frac{6}{6-x}=\frac{4\frac{2}{7}}{x-4\frac{2}{7}}.$$
解之,得 $x=5$. 经检验 $x=5$ 是原方程的根.

故总站每隔 5 分钟发一辆车.

例 8 用大小两种箱子装 720 件产品. 如果产品的一半用大箱装,一半用小箱装,那么要用 75 只箱子;如果产品的 $\frac{2}{3}$ 用大箱装,其余用小箱装,那么可以少用 5 只箱子;如果产品的 $\frac{5}{6}$ 用大箱装,其余用小箱,那么要用多少只箱子?

解 设每只大箱能装产品 x 件,每只小箱能装产品 y 件. 依题设,有
$$\begin{cases}\frac{720}{2x}+\frac{720}{2y}=75,\\ \frac{720\times 2}{3x}+\frac{720}{3y}=75-5.\end{cases}$$
化简得
$$\begin{cases}\frac{24}{x}+\frac{24}{y}=5, & ①\\ \frac{48}{x}+\frac{24}{y}=7. & ②\end{cases}$$
②－①得
$$\frac{24}{x}=2,$$
解得 $x=12$. 将 $x=12$ 代入①得 $y=8$.

经检验 $\begin{cases}x=12\\ y=8\end{cases}$ 满足题意. 进而知 $\frac{5}{6}$ 产品用大箱装,需大箱数为
$$\frac{5}{6}\times\frac{720}{12}=50(只);$$

$\frac{1}{6}$产品用小箱装，需小箱数为

$$\frac{1}{6}\times\frac{720}{8}\approx 15(\text{只}).$$

例 9 已知甲、乙、丙三人，甲单独做一件工作的时间是乙、丙两人合作做这件工作所用时间的 a 倍，乙单独做这件工作所用的时间是甲、丙两人合作做这件工作所用时间的 b 倍，$ab\neq 1$. 求丙单独工作所用的时间是甲、乙两人合作做这件工作所需时间的几倍.

解一 设甲、乙、丙独立完成这件工作分别需要 x,y,z 天，则甲、乙、丙单独做一天分别完成这件工作的$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$，乙、丙合作做这件工作所用的时间应是$\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$天，甲、丙合作做这件工作所用的时间应是$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$天，甲、乙合作做这件工作所用的时间应是$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$天.

依题设，有

$$\begin{cases} x=a\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}, \\ y=b\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}, & ① \\ \dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}. & ② \end{cases}$$

注意到 $ab\neq 1$，由①，②可得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{b+1}{ab-1}\cdot\dfrac{1}{z},\\[2ex]\dfrac{1}{y}=\dfrac{a+1}{ab-1}\cdot\dfrac{1}{z},\end{cases}$$

进而得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{a+b+2}{ab-1}\cdot\frac{1}{z},$$

即
$$z=\frac{a+b+2}{ab-1}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}.$$

故丙单独完成这件工作所用的时间是甲、乙合做这件工作所用时间的$\dfrac{a+b+2}{ab-1}$倍.

解二 设丙单独完成这件工作所用的时间是甲、乙合作做这件工作所用时间的 c 倍,甲、乙、丙独立完成这件工作分别需要 x,y,z 天,依题设,得

$$\begin{cases}x=a\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}},\\[3ex]y=b\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}},\\[3ex]z=c\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}.\end{cases}$$

故
$$\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{x},\\[2ex]\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{b}{y},\\[2ex]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{z},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{a+1}{x},\\[2mm]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{b+1}{y},\\[2mm]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{c+1}{z}.\end{cases}$$

所以
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+1}{x}=\frac{b+1}{y}=\frac{c+1}{z}.$$

令$\frac{c+1}{z}=k$，则$\frac{1}{x}=\frac{k}{a+1},\frac{1}{y}=\frac{k}{b+1},\frac{1}{z}=\frac{k}{c+1}$,
$$\frac{k}{a+1}+\frac{k}{b+1}+\frac{k}{c+1}=k,$$

有
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$$

解得 $c=\frac{a+b+2}{ab-1}$，即为所求.

练 习 六

一、填空题

1. 当 $m=$______时，关于 x 的方程$\frac{2mx+3}{m-x}=\frac{5}{4}$的根为 1.

2. 若 $a\neq b$，则关于 x 的方程$\frac{b}{ax}-\frac{a}{bx}+2=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$的解是____.

3. 若关于 x 的方程$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$有增根 $x=1$，则 k 的值等于______.

4. 方程$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+1998)(x+1999)}=1+\frac{1}{x}$的解是______.

二、解答题

5. 解分式方程

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+4}.$$

6. 解下列分式方程：

(1) $\frac{2}{x^2+4x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=\frac{5}{x^2-1}$；

(2) $\frac{x^3+7x^2+x+30}{x^2+5x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}$.

7. 解方程组：

(1) $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z+1}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z$；

(2) $\begin{cases}\frac{xy+x}{x+y+1}=2,\\ \frac{xz+2x}{x+z+2}=3,\\ \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}=4.\end{cases}$

8. A、B 两地相距 120 千米．甲、乙两地骑车从 A 到 B，若甲比乙迟出发 1 小时，则乙比甲要迟到 2 小时 30 分钟．已知甲、乙两人的速度之比是 3:2，求甲、乙两人的速度．

9. 一台电子收报机，它的译电效率相当于人工译电效率的 75 倍，译电 3000 个字比人工译电少用 2 小时 28 分．问：这台收报机与人工每分钟各译电多少字？

10. 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，相遇后立即返回原地，各用 48 分钟；若乙比甲提前 10 分钟出发，则甲走 20 分钟和乙相遇．问：甲由 A 到 B，乙由 B 到 A，各需要多少分钟？

第七讲　条件等式下的分式运算

知识点和方法述要

1. 如果 a,b,c,d 四个数满足$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则称这四个数成比例.

(1)比例的基本性质:如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$.

(2)合比性质:如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

(3)等比性质:如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$,且 $b+d+\cdots+n\neq0$,那么$\frac{a+b+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

证明　设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$,则 $a=bk,c=dk,\cdots,m=nk$,有

$$a+c+\cdots+m=k(b+d+\cdots+n)$$

因 $b+d+\cdots+n\neq0$,故

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=k=\frac{a}{b}.$$

2. 本讲中关于含条件等式的分式运算着重以下两个方面:

(1)含条件等式的分式的求值.一般地,分式求值采取先化简再求值的步骤.对于含条件等式的分式求值问题,除了考虑对欲求值的分式进行化简外,要注意对条件等式进行观察、分析,作适当变形,将条件等式和欲求值的分式加以综合分析,尤其是对较复杂的条件等式更要根据问题需要加以转化,再以适当的方式参与到分式求值过程中去.

(2)含条件等式的分式恒等式的证明.一般地,欲证 $A=B$,则采用以下方式:化繁为简,从 $A(B)$到 $B(A)$;作差(比),证 $A-B=0$ 或$\frac{A}{B}=1$;左右归一,由 $A=C,B=C$,推出 $A=B$.

对于含条件恒等式的证明，其基本方法仍如上所述，但关键在于用好条件. 注意根据需要对条件等式作出变形，充分揭示其隐蔽的各种性质，以便在适当的时机介入恒等式的证明，充分发挥其条件作用.

例 题 精 讲

例 1 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

解一 由$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$，可得 $x-y=-2xy$，代入原式，有

原式$=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{-4xy+3xy}{-2xy-2xy}=\frac{xy}{4xy}=\frac{1}{4}$.

解二 将分子、分母同除以 xy，得

原式$=\dfrac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}=\dfrac{2(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})+3}{(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})-2}=\dfrac{2\times(-2)+3}{-2-2}=\dfrac{1}{4}$.

注 解二中，利用分式的基本性质，将欲求值的分式变形，为条件等式的整体介入提供了便利，从而为问题的解决另辟了一条捷径.

例 2 已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=a(a\neq0,a\neq\frac{1}{2})$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

分析 显然 $x\neq0$，注意到条件等式中分母次数高于分子次数，可将其变为

$$\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1=\frac{1}{a}, \qquad ①$$

而欲求值的分式取倒数，得

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=(x+\frac{1}{x})^2-1. \qquad ②$$

比较①、②，由①得

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a},$$

直接代入②得

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=(\frac{1-a}{a})^2-1=\frac{1-2a}{a^2}.$$

因 $a\neq\frac{1}{2}$,所以

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{a^2}{1-2a}.$$

例 3 已知 $4x-3y-6z=0$, $x+2y-7z=0$,求$\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$的值.

分析一 对于 x,y,z,由二个条件等式不能直接求得 x,y,z 的值.若 $z=0$,则 $4x-3y=0$, $x+2y=0$,可得 $x=y=0$.此时欲求值的分式无意义,故 $z\neq0$,条件等式可变为

$$\begin{cases}4\cdot\frac{x}{z}-3\cdot\frac{y}{z}=6, & ①\\ \frac{x}{z}+2\cdot\frac{y}{z}=7. & ②\end{cases}$$

而欲求值的分式可变为

$$\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}=\frac{2\cdot(\frac{x}{z})^2+3\cdot(\frac{y}{z})^2+6}{(\frac{x}{z})^2+5\cdot(\frac{y}{z})^2+7}. \quad ③$$

由①,②可解得

$$\begin{cases}\frac{x}{z}=3,\\ \frac{y}{z}=2.\end{cases}$$

代入③得

$$原式=\frac{2\times3^2+3\times2^2+6}{3^2+5\times2^2+7}=1.$$

分析二 由二个条件等式可直接求得 $x=3z$, $y=2z$,再代入原式,有

原式 $=\dfrac{2\cdot(3z)^2+3\cdot(2z)^2+6\cdot z^2}{(3z)^2+5\cdot(2z)^2+7\cdot z^2}=1.$

例 4 已知 $a\neq b, x=\dfrac{4ab}{a+b}$,求$\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$的值.

解一 原式 $=2+4(\dfrac{a}{x-2a}+\dfrac{b}{x-2b})$

$$=2+4\cdot\frac{(a+b)x-4ab}{(x-2a)(x-2b)}.$$

当 $x=\dfrac{4ab}{a+b}$时,

$$原式=2+4\cdot\frac{(a+b)\cdot\dfrac{4ab}{a+b}-4ab}{(x-2a)(x-2b)}$$

$=2.$

解二 显然 $a\neq 0$,依题设,有

$$\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b}.$$

根据合分比性质,得

$$\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{3b+a}{b-a}. \quad ①$$

同理

$$\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3a+b}{a-b}. \quad ②$$

① + ②得

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{2b-2a}{b-a}=2.$$

注 例 4 的解一中,根据所要求值的分式特点,分拆成整式与分式和,起到简化计算作用. 而所要求值的分式结构使人联想到合分比性质,进而着手对条件等式进行"改头换面",这样也就有了解二的思路.

例 5 若$\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$,求

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

的值.

解一 (i)若 $a+b+c\neq0$,根据等比性质,有

$$\begin{aligned}&\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}\\&=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{c+b+a}\\&=\frac{a+b+c}{c+b+a}\\&=1.\end{aligned}$$

即得 $a+b-c=c,a-b+c=b,-a+b+c=a$,所以 $a+b=2c$,$a+c=2b$,$b+c=2a$,于是

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot2a\cdot2b}{abc}=8.$$

(ii)若 $a+b+c=0$,有

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1.$$

解二 令

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k.$$

则

$$a+b=(k+1)c, \quad ①$$

$$a+c=(k+1)b, \quad ②$$

$$b+c=(k+1)a. \quad ③$$

①+②+③得

$$2(a+b+c)=(k+1)(a+b+c),$$

即

$$(a+b+c)(k-1)=0.$$

故有 $k=1$ 或 $a+b+c=0$.

(i)当 $k=1$ 时,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot2a\cdot2b}{abc}=8.$$

(ii)当 $a+b+c=0$ 时,同解一.

注 (1)当出现等比形式时,如例5解二引进参数 k 是常采用的

手段.

(2)运用等比性质时,要注意连比分母的和为零的情形须另行考虑.

例 6 已知

$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$, ①

求$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值.

解 令 $a=x-y, b=y-z, c=z-x$,由①得

$$a^2+b^2+c^2=(a-c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2,$$

化简得 $$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0. \qquad ①$$

又 $$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0,$$

有 $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0. \qquad ②$$

①+②得 $$a^2+b^2+c^2=0.$$

所以 $a=b=c=0$,即

$$x-y=y-z=z-x=0,$$

可得 $x=y=z$. 于是

$$原式=\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=1.$$

例 7 若 $abc=1$,求

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

的值.

解一 因 $abc=1$,故 a,b,c 均不为零,有

$$\begin{aligned}原式&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\&=1.\end{aligned}$$

解二 由 $abc=1$，得 $a=\frac{1}{bc}$，代入原式，有

$$原式=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc}\cdot b+\frac{1}{bc}+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{c\cdot\frac{1}{bc}+c+1}$$

$$=\frac{1}{bc+b+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+b+bc}$$

$$=\frac{1+b+bc}{bc+b+1}$$

$$=1.$$

例 8 若 n 为自然数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证：$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$.

证明 由条件等式得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1,$$

去分母，得 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0.$ ①

当 $a=-b$ 时，①式左边等于

$$(a+b+c)[ab+c(a+b)]-abc=c\cdot ab-abc=0,$$

含有因式 $(a+b)$. 根据对称性，又知其含有因式 $b+c, c+a$. 故

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=k(a+b)(b+c)(c+a).$$

比较两边 a^2b 的系数知 $k=1$. 所以①可变为

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

即 $a=-b$ 或 $b=-c$，或 $c=-a$.

当 $a=-b$ 时，易证等式两边都是 $\frac{1}{c^{2n+1}}$，等式成立. 同理 $b=-c$ 或 $c=-a$ 时等式也成立.

例 9 已知 $\frac{p}{x^2-yz}=\frac{q}{y^2-zx}=\frac{r}{z^2-xy}$，求证：

$$px+qy+rz=(x+y+z)(p+q+r).$$

证明 设$\frac{p}{x^2-yz}=\frac{q}{y^2-zx}=\frac{r}{z^2-xy}=k$，则 $p=k(x^2-yz)$，$q=k(y^2-zx)$，$r=k(z^2-xy)$. 于是

$$px+qy+rz=k(x^2-yz)x+k(y^2-zx)y+k(z^2-xy)z$$
$$=k(x^3+y^3+z^3-3xyz),$$

$$(x+y+z)(p+q+r)=(x+y+z)[k(x^2-yz)+k(y^2-zx)+k(z^2-xy)]$$
$$=k(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=k(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

所以 $$px+qy+rz=(x+y+z)(p+q+r).$$

练 习 七

一、选择题

1. 若$\frac{x}{y}=3$，则$\frac{x^2+xy}{y^2}$的值为 ( ).

(A)12 (B)9 (C)6 (D)3

2. 若 $ab=1$，且 $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$，$N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$，则 M、N 的大小关系是 ( ).

(A)$M>N$ (B)$M=N$ (C)$M<N$ (D)不能确定

3. 若 $abc\neq 0$，$a+b+c=0$，则 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$的值为 ( ).

(A)正数 (B)负数 (C)零 (D)不能确定

4. 若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_{99}}{a_{100}}=\frac{a_{100}}{a_1}$，则$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_{99}}=$ ( ).

(A)$\frac{100}{99}$ (B)0 或$\frac{100}{99}$ (C)0 (D)0 或 1

5. 若$\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1}=\frac{a_1+a_3+a_4}{a_2}=\frac{a_1+a_2+a_4}{a_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_4}=$

k,则 k 的值为 ( ).

(A)3 (B)$\frac{1}{3}$ (C)-1 (D)3 或 -1

二、填空题

6.若 $2a^2-5a+2=0$,则$\frac{a^3}{a^6+1}$的值为______.

7.若$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$,则$\frac{x^2-2y^2+3z^2}{xy+2yz+3zx}$的值是______.

8.如果$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$,$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$,$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{5}$,那么$\frac{abc}{ab+bc+ca}$的值是______.

9.若 $ab\neq0$,$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=\frac{a+b}{1+a+b}$,则 $a+b=$______.

三、解答题

10.已知 $x+y+z=3$,则 x,y,z 不全相等,求$\frac{(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$的值.

11.已知 $abc\neq0$,且 $a^2+b^2+c^2=1$,$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=-3$,求 $a+b+c$ 的值.

12.已知 a,b,c,x 均不为零,且$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}$,证明:$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}$.

13.已知 $a+b+c=0$,求$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$的值.

第八讲　实数和二次根式(一)

知识点和方法述要

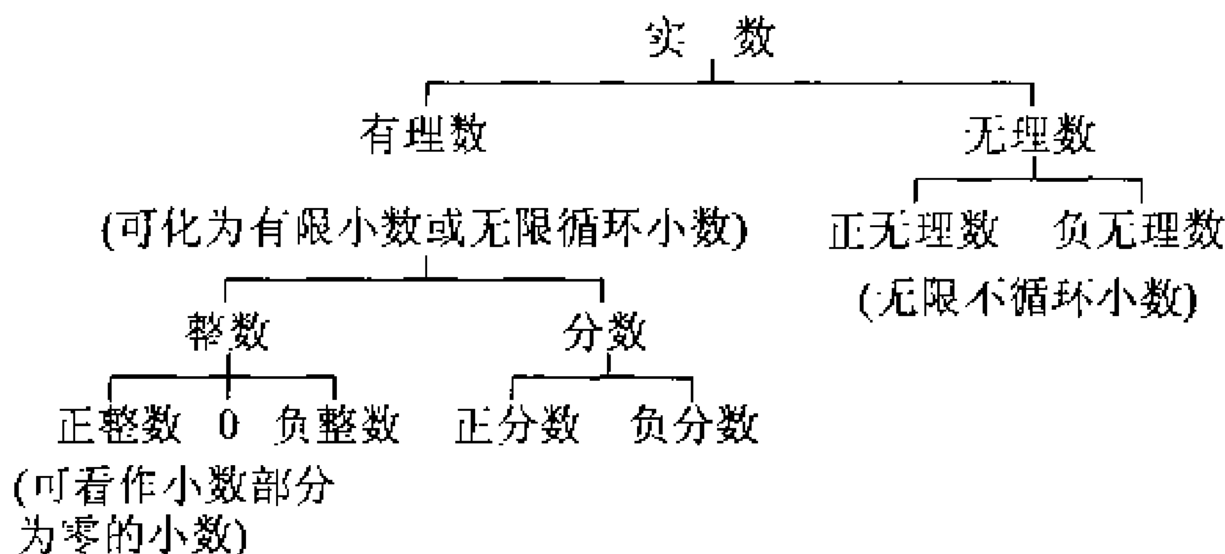
1.如果一个数的平方等于 a,这个数叫做 a 的平方根,即 $x^2=a$,则 x 是 a 的平方根.一般地,如果一个数的 n 次方(n 为大于 1 的整数)等于 a,这个数就叫做 a 的 n 次方根,即 $x^n=a$,则 x 是 a 的 n 次方根.求 a 的 n 次方根的运算,叫做把 a 开 n 次方,a 叫做被开方数,n 叫做根指数.开 n 次方与 n 次方互为逆运算.

2.(1)正数的偶次方根有两个,它们互为相反数;正数的奇次方根是一个正数,负数的奇次方根是一个负数,0 的 n 次方根是 0.

(2)如果 $a>0$,n 是正奇数,则 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

(3)正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根,零的 n 次方根也叫做零的 n 次算术根.

3.(1)有理数和无理数统称为实数.实数可分为正实数、零、负实数,也可如下分类:



(2)有理数扩大到实数以后,在有理数范围内定义的一些概念(如:倒数、互为相反数、绝对值等)在实数范围内仍然适用.在实数范围内,加、减、乘、除、乘方五种运算的结果仍为实数(除数不能为零).

正实数和零总能进行开方运算，负实数只能开奇次方，不能开偶次方．有理数范围内的运算律和运算顺序在实数范围内仍然相同．

(3)数扩充到实数范围后，实数和数轴上的点是一一对应的．两个实数可以比较大小，在数轴上越往右边的数越大．

4．(1)式子$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$叫做二次根式．

(2)二次根式的主要性质：

(i)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

(ii)$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

(iii)$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$.

(3)最简二次根式是指满足下列条件的二次根式：

(i)被开方数的因数是整数，因式是整式；

(ii)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式．

化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式，合并同类根式类似整式运算中的合并同类项，仅仅合并系数，而被开方数不变．

例　题　精　讲

例 1　已知一个分数的分子与分母之和为 37，这个分数的算术平方根为 0.92(精确到 0.01)，求该分数．

解　设这个分数的分子为 a，分母为 b．依题设，有 $a+b=37$，且

$$0.915\leqslant\sqrt{\frac{a}{b}}<0.925. \qquad ①$$

于是，有

$$0.837\leqslant\frac{a}{b}<0.856,$$

可得 $$0.837 \leqslant \frac{37-b}{b} < 0.856.$$

进而，有 $$\frac{37}{1.836} < b \leqslant \frac{37}{1.837},$$

故 $$19.9 < b \leqslant 20.2.$$

所以，$b=20$，$a=17$. 于是$\frac{a}{b}=\frac{17}{20}$. 经验证$\frac{17}{20}$即为所求分数.

例 2 已知$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$为无理数，求证：$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$是无理数.

证明 假设 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$为有理数，注意到

$$(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2=18-12=6,$$

又是有理数，根据有理数对加、减、乘、除运算封闭，故

$$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\frac{6}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

也是有理数.

设 $$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=p, \quad ①$$

$$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=q, \quad ②$$

(p、q 为有理数). 由①,②可得

$$\sqrt{2}=\frac{p+q}{6}, \quad ③$$

$$\sqrt{3}=\frac{p-q}{4}. \quad ④$$

由③,④知$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$均为有理数，这与$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$为无理数相矛盾. 因此，$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$为无理数.

注 无理数的定义是无限不循环小数，即指实数中不是有理数的数. 可见，无理数的定义是以否定方式出现. 一般地无理数难以表示，而有理数却可表示成$\frac{q}{p}$(p, q 都是整数). 因此，证明有关无理数问题常用反证法. 如证明$\sqrt{2}$是无理数. 可设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$(既约分数)，则$\sqrt{2}p=q$, $2p^2=q^2$，故 $2\mid q$. 进而，设 $q=2m$(m 为正整数)，可得 $p^2=2m^2$，又有 $2\mid p$，导致矛盾.

例 3　设 x, y 为有理数,且

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)y-2.25-\frac{29\sqrt{3}}{10}=0. \qquad ①$$

试求 $x+y$ 的值.

解　由①可得

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2.25\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{12}-\frac{29}{10}\right)\sqrt{3}=0. \qquad ②$$

因 x, y 为有理数,故 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2.25$ 与 $\frac{x}{2}-\frac{y}{12}-\frac{29}{10}$ 都是有理数.由②知

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2.25=0, & ③\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{12}-\frac{29}{10}=0. & ④\end{cases}$$

否则,③或④不成立,将导致 $\sqrt{3}$ 为有理数,矛盾.

由③,④可得 $x=3\frac{3}{5}, y=4\frac{1}{5}$. 于是

$$x+y=3\frac{3}{5}+4\frac{1}{5}=7\frac{4}{5}.$$

例 4　已知 $9+\sqrt{13}$ 与 $9-\sqrt{13}$ 的小数部分分别是 a 和 b,求 $ab-4a+3b+8$ 的值.

解　因 $3<\sqrt{13}<4$,故 $12<9+\sqrt{13}<13$,于是

$$a=(9+\sqrt{13})-12=\sqrt{13}-3.$$

又　$5<9-\sqrt{13}<6$,可知

$$b=(9-\sqrt{13})-5=4-\sqrt{13}.$$

所以

$$\begin{aligned}&ab-4a+3b+8\\ =&(a+3)(b-4)+20\\ =&\sqrt{13}\cdot(-\sqrt{13})+20\\ =&7.\end{aligned}$$

例 5　已知 x, y 满足 $\frac{10y-3x}{3x-y}=2$,且 $x\neq 0$,求 $\frac{\sqrt{15x-8y}}{\sqrt{5x+4y}}$ 的值.

解 因 $x\neq0$,依题设,有

$$\frac{10\cdot\frac{y}{x}-3}{3-\frac{y}{x}}=2. \qquad ①$$

由①可得$\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$.于是

$$\frac{\sqrt{15x-8y}}{\sqrt{5x+4y}}=\sqrt{\frac{15x-8y}{5x+4y}}=\sqrt{\frac{15-8\cdot\frac{y}{x}}{5+4\cdot\frac{y}{x}}}=\sqrt{\frac{15-8\times\frac{3}{4}}{5+4\times\frac{3}{4}}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

例6 已知 $a>0,b>0$,且

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}+2\sqrt[3]{b})=\sqrt[3]{b}(\sqrt{a}+6\sqrt[3]{b}), \qquad ①$$

求
$$\frac{2a^4+a^3b-128ab^2-64b^3+b^4}{a^4+2a^3b-64ab^2-128b^3+2b^4}$$
的值.

解 由①得

$$(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}-6(\sqrt[3]{b})^2=0,$$

即
$$(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b})(\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b})=0. \qquad ②$$

因 $a>0,b>0$,故$\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\neq0$. 由②可得$\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}=0$,即 $a^3=64b^2$.于是

$$原式=\frac{2a(a^3-64b^2)+b(a^3-64b^2)+b^4}{a(a^3-64b^2)+2b(a^3-64b^2)+2b^4}=\frac{b^4}{2b^4}=\frac{1}{2}.$$

例7 已知$\sqrt{x}=\frac{1-a}{2}$,且

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}=-2, \qquad ①$$

求 a 的取值范围.

解 因$\sqrt{x}=\frac{1-a}{2}$,故 $a\leqslant1$ 且 $x=\frac{(1-a)^2}{4}$.进而,有

$$\sqrt{x+a}=\sqrt{\frac{(1-a)^2}{4}+a}=\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4}}=\frac{|1+a|}{2}, \qquad ②$$

$$\sqrt{x-a+2}=\sqrt{\frac{(1-a)^2}{4}-a+2}=\sqrt{\frac{(a-3)^2}{4}}=\frac{|3-a|}{2}=\frac{3-a}{2}.$$

③

由①,②,③得

$$\frac{|1+a|}{2}+\frac{3-a}{2}=\div 2,$$

即 $$|1+a|=-(1+a).$$

故 $1+a\leqslant 0$, $a\leqslant -1$ 即为所求取值范围.

例 8 设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3$, $xyz>0$,且

$$\sqrt[3]{1995x^2+1995y^2+1997z^2}=\sqrt[3]{1995}+\sqrt[3]{1996}+\sqrt[3]{1997}, \qquad ①$$

试求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的值.

解 设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3=k$. 因 $xyz>0$,故 $k\neq 0$,有 $1995=\frac{k}{x^3}$, $1996=\frac{k}{y^3}$, $1997=\frac{k}{z^3}$. 代入①可得

$$\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}},$$

即 $$\sqrt[3]{k}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \qquad ②$$

由②可得

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

进而,得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3. \qquad ③$$

依题设知 $x>0$, $y>0$, $z>0$,故由③得

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=1.$$

进而,有 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

例 9 设正有理数 a_1 是$\sqrt{3}$的一个近似值，$a_2=1+\dfrac{2}{a_1+1}$.

(1)求证：$\sqrt{3}$介于 a_1 和 a_2 之间，且 a_2 比 a_1 更接近$\sqrt{3}$.

(2)写出比 a_2 更接近于$\sqrt{3}$的另一个为有理数的近似值.

解 (1) $\sqrt{3}-a_2=\sqrt{3}-(1+\dfrac{2}{a_1+1})$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)a_1+\sqrt{3}-3}{a_1+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(a_1-\sqrt{3})}{a_1+1}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}-1}{a_1+1}(\sqrt{3}-a_1),$$

注意到 $a_1>0$，于是

$$(\sqrt{3}-a_1)(\sqrt{3}-a_2)=-\frac{\sqrt{3}-1}{a_1+1}(\sqrt{3}-a_1)^2<0.$$

故$\sqrt{3}-a_1$ 与$\sqrt{3}-a_2$ 异号，即$\sqrt{3}$介于 a_1 与 a_2 之间.

因
$$\frac{|\sqrt{3}-a_2|}{|\sqrt{3}-a_1|}=\left|-\frac{\sqrt{3}-1}{a_1+1}\right|=\frac{\sqrt{3}-1}{a_1+1}<1,$$

所以
$$|\sqrt{3}-a_2|<|\sqrt{3}-a_1|.$$

这表明 a_2 比 a_1 更接近$\sqrt{3}$.

(2)取 $a_3=1+\dfrac{2}{a_2+1}$，则由(1)可知 a_3 是比 a_2 更接近$\sqrt{3}$的一个为有理数的近似值.

练 习 八

一、选择题

1. 下列 5 个数：3.1416，$\dfrac{1}{\pi}$，$\sqrt{\pi}$，0.333，$\sqrt{3}-1$，其中无理数的个数为 ( ).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)多于 3

2.已知 $a>0$,化简$\sqrt{-ab^3}$后的结果是　　(　　).

(A)$b\sqrt{-ab}$　　(B)$-b\sqrt{-ab}$

(C)$-b\sqrt{ab}$　　(D)$|b|\sqrt{ab}$

3.下列命题:

(1)两个无理数的和是无理数;

(2)两个无理数的积是无理数;

(3)一个有理数与一个无理数的和是无理数;

(4)一个无理数与一个有理数的积是无理数.

其中真命题的个数是　　(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

4.已知 $a=2-\sqrt{3}$,那么$\frac{a^2-1}{a+1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的值等于 (　　).

(A)$-(1+2\sqrt{3})$　　(B)-1　　(C)$2-\sqrt{3}$　　(D)3

5.设 $a=\sqrt{1003}+\sqrt{997}$, $b=\sqrt{1001}+\sqrt{999}$, $c=2\sqrt{1000}$,则　　(　　).

(A)$a>b>c$　　(B)$a>c>b$

(C)$b>a>c$　　(D)$c>b>a$

二、填空题

6.$(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$的值等于______.

7.已知 $0<x<1$,则$\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}-\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4}$化简后的结果是______.

8.当 $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$时,$(4x^3-1997x-1994)^{2001}$的值是________.

9.若 $x=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$,则$(\frac{x^2-y^2}{2})^2+xy$ 的值是________.

10.两最简根式$\sqrt[3x+y]{2x-y}$与$\sqrt[y+6]{4x+y-2}$是同次根式，且y是偶数，则y的值是______.

三、解答题

11.已知$x^2+\sqrt{2}y=\sqrt{3}$，$y^2+\sqrt{2}x=\sqrt{3}(x\neq y)$，试求$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$的值.

12.比较$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}$与$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$的大小.

13.设$s=\frac{ax+b}{cx+d}$，a,b,c,d是有理数，x是无理数，求证：

(1)当$bc=ad$时，s是有理数；

(2)当$bc\neq ad$时，s是无理数.

14.已知a,b都是正有理数，且$a\neq\sqrt{2}b$，试证明：$\sqrt{2}$必介于$\frac{a}{b}$与$\frac{a+2b}{a+b}$之间.

第九讲　实数和二次根式(二)

知识点和方法述要

1. 正数和零统称非负数. 绝对值、偶次乘方、偶次根式及偶次根式的被开方数都是非负数.

常用的非负数的主要性质有:

(i)有限个非负数的和、积、商(除数不为零)是非负数;

(ii)若干个非负数的和等于零,则每个加数都为零;

(iii)若非负数不大于零,则此非负数必为零.

2. 复合二次根式的常见形式为$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$,对它化简的最基本方法之一是借助完全平方公式$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}$,将$a\pm2\sqrt{b}$配成$(x\pm y)^2$的形式. 为此,只需找到满足$x+y=a$, $xy=b$的数对x, y即可. 这里实际上采用了待定系数法,也可直接通过观察得到.

根式$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$一般要先化为$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$的形式再化简. 更进一步,由等式

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

可知,要化简$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$,必须满足$A^2-B\geqslant0$,且A^2-B是一个完全平方数,否则不能化简.

3. 把分母中根号化去,叫做分母有理化. 分母有理化的关键是选择一个适合的数(式),用它去乘分母时,可以使分母不含根号. 一般地,如果两个含有二次根式的代数式相乘的积不含有二次根式,那么我们说这两个代数式互为有理化因式. 显然,分母有理化首先要找出分母的有理化因式.

常用的二次根式的互为有理化因式有$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$($a\geqslant 0$)、$a+\sqrt{b}$与$a-\sqrt{b}$,更一般地如$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$与$m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$.

例 题 精 讲

例 1 已知 x, y 均为有理数,且$\sqrt{\frac{21}{4}+3\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$,求$\sqrt[2000]{2x-y}$的值.

解 $\sqrt{\frac{21}{4}+3\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{21+12\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{21+2\times 6\times\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9+2\times 3\times 2\sqrt{3}+12}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+2\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}.$$

故 $\quad x+\sqrt{y}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}.$

因 x, y 为有理数,所以 $x=\frac{3}{2}, y=3$. 于是

$$\sqrt[2000]{2x-y}=\sqrt[2000]{2\times\frac{3}{2}-3}=0.$$

例 2 化简:$\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}-\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}$.

解一 原式$=\sqrt{\frac{1}{2}(2y-5)+3\sqrt{2y-5}+\frac{9}{2}}$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}(2y-5)+\sqrt{2y-5}+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sqrt{2y-5})^2+6\sqrt{2y-5}+9]}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}[(\sqrt{2y-5})^2+2\sqrt{2y-5}+1]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2y-5}+3)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2y-5}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2y-5}+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2y-5}+1)$$

$$=\sqrt{2}.$$

解二　设$\sqrt{2y-5}=a$，则 $a\geqslant 0$，且 $y=\frac{1}{2}(a^2+5)$.

$$原式=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+5)+2+3a}-\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+5)-2+a}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+6a+9)}-\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+2a+1)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(a+3)^2}-\sqrt{\frac{1}{2}(a+1)^2}$$

$$=\frac{(a+3)\sqrt{2}}{2}-\frac{(a+1)\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}.$$

例 3　化简：

(1)$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$；

(2)$\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$.

解　(1)原式$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})-\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$

$$=-(5-2\sqrt{6})$$

$$=2\sqrt{6}-5.$$

(2)原式$=\frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+\frac{1}{2}(3-\sqrt{7})+\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$=1.$$

例 4 计算

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

解 原式中第 k 项进行分母有理化,可得

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2-k^2(k+1)}$$
$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

取 $k=1,2,\cdots,99$,相加得

$$原式=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{98}}-\frac{1}{\sqrt{99}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{9}{10}.$$

例 5 已知 $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,求

$$x^6-2\sqrt{2}x^5-x^4+x^3-2\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{2}$$

的值.

解 因
$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$
即
$$x-\sqrt{3}=\sqrt{2},$$
两边平方,有
$$x^2-2\sqrt{3}x+1=0. \quad ①$$
同理,由 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$可得
$$x^2-2\sqrt{2}x-1=0. \quad ②$$

由①,②可得

$$\text{原式}=x^4(x^2-2\sqrt{2}x-1)+x(x^2-2\sqrt{3}x+1)+x-\sqrt{2}$$
$$=x-\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{3}.$$

例 6 求不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的值的最大整数.

解 设$\sqrt{7}+\sqrt{5}=a,\sqrt{7}-\sqrt{5}=b$,则

$$\begin{cases}a+b=2\sqrt{7},\\ab=2.\end{cases}$$

于是 $$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{7})^2-2\times2=24.$$

进而,有

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3(xy)^2(x^2+y^2)=13536.$$

即 $$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^6=13536.$$

又$0<\sqrt{7}-\sqrt{5}<1$,所以$13535<(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6<13536$.所求不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的最大整数为13535.

例 7 已知

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-a}+\sqrt{z+a-3}=\frac{1}{2}(x+y+z),\qquad ①$$

求$2x+y+z$的值.

解 由①得

$$2\sqrt{x}+2\sqrt{y-a}+2\sqrt{z+a-3}=x+y+z,$$

即 $(x-2\sqrt{x}+1)+(y-a-2\sqrt{y-a}+1)+(z+a-3-2\sqrt{z+a-3}+1)=0.$

故 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-a}-1)^2+(\sqrt{z+a-3}-1)^2=0.$

因$(\sqrt{x}-1)^2\geqslant0,(\sqrt{y-a}-1)^2\geqslant0,(\sqrt{z+a-3}-1)^2\geqslant0$,所以

$$\begin{cases}\sqrt{x}-1=0,\\\sqrt{y-a}-1=0,\\\sqrt{z+a-3}-1=0.\end{cases}$$

解得$x=1,y=a+1,z=4-a$.于是

$$2x+y+z=2\times1+(a+1)+(4-a)=7.$$

例 8 已知 $a\geqslant0,b\geqslant0$.求证:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}. \qquad ①$$

证明 ①式即

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b+\frac{1}{2})\geqslant\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}). \qquad ②$$

因 $\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0, \qquad ③$$

$$a+b+\frac{1}{2}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(a+\frac{1}{4}-\sqrt{a})+(b+\frac{1}{4}-\sqrt{b})$$

$$=(\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2\geqslant0, \qquad ④$$

由③,④相乘,即得②,故①成立.命题获证.

例 9 求证:$\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}=1.$

证一 设 $\sqrt{\frac{8x-1}{3}}=a$,则 $x=\frac{3a^2+1}{8}$,且

$$\frac{x+1}{3}=\frac{1}{3}(\frac{3a^2+1}{8}+1)=\frac{a^2+3}{8}.$$

故
$$\begin{aligned}左边&=\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}+\frac{a^2+3}{8}\cdot a}+\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}-\frac{a^2+3}{8}\cdot a}\\&=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^3+3a^2+3a+1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a^3+3a^2-3a+1}\\&=\frac{1}{2}(1+a)+\frac{1}{2}(1-a)\\&=1\\&=右边,\end{aligned}$$

等式成立.

证二 设 $m=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$,$n=\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$,$m$

$+n=t$,则

$$\begin{aligned} t^3 &= m^3+n^3+3mn(m+n) \\ &= 2x+3\sqrt[3]{x^2-\frac{(x+1)^2}{9}\cdot\frac{8x-1}{3}}\cdot t \\ &= 2x+3\cdot\sqrt[3]{\frac{1-6x+12x^2-8x^3}{27}}\cdot t \\ &= 2x+\sqrt[3]{(1-2x)^3}\cdot t \\ &= 2x+(1-2x)t, \end{aligned}$$

即
$$t^3-(1-2x)t-2x=0,$$
也就是
$$(t-1)(t^2+t+2x)=0.$$

因$\frac{8x-1}{3}\geqslant 0$,得 $x\geqslant\frac{1}{8}$,于是

$$t^2+t+2x=(t+\frac{1}{2})^2+2(x-\frac{1}{8})\geqslant 0.$$

故 $t=1$.所欲证等式成立.

练 习 九

一、选择题

1.若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$,则$\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{3y-2\sqrt{x}}}$的值是 (　　).

(A)1　　(B)$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$　　(C)$3+2\sqrt{2}$　　(D)$3-2\sqrt{2}$

2.如果$\sqrt{a-b-2\sqrt{3}}+(a+b-2\sqrt{2})^2=0$,则$\frac{b}{a}$的值是 (　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)$5-2\sqrt{6}$　　(D)$2\sqrt{6}-5$

3.已知 $y=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$,x 表示 y 的小数部分,则 x^2+2y 的值为 (　　).

(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

4.设 a 为$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$的小数部分，$b$ 为$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$的小数部分，则$\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$为　　　　(　　).

(A)$\sqrt{6}-\sqrt{2}+1$　　　　(B)$\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$

(C)$\sqrt{6}-\sqrt{2}-1$　　　　(D)$\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$

5.已知正整数 a,m,n 满足

$$\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n},$$

则这样的 a,m,n 的取值　　　　(　　).

(A)有一组　　　　(B)有二组

(C)多于二组　　　　(D)不存在

二、填空题

6.$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$化简后的值是______.

7.$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^{-1}$化简后的值是______.

8.若 u,v 满足 $v=\sqrt{\frac{2u-v}{4u+3v}}+\sqrt{\frac{v-2u}{4u+3v}}+\frac{3}{2}$，则 $u^2-uv+v^2=$______.

三、解答题

9.已知 $x=\sqrt{7}+\sqrt{5}$，$y=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，试求

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\left(x+\frac{1}{y}-\frac{2}{y}\sqrt{xy}\right)$$

的值.

10.若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$的值.

11.已知$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$，求$\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}$的值.

12. 计算$\dfrac{\sqrt{6.3\times1.7}\times\left(\sqrt{\dfrac{6.3}{1.7}}-\sqrt{\dfrac{1.7}{6.3}}\right)}{\sqrt{(6.3+1.7)^2-4\times6.3\times1.7}}$.

13. 已知 a,b,c 满足 $a=2b+\sqrt{2}$,且

$$ab+\frac{\sqrt{3}}{2}c^2+\frac{1}{4}=0,$$

求$\dfrac{bc}{a}$的值.

第十讲　完全平方数

知识点和方法述要

1. 如果一个正整数是某一整数的平方，则称其为完全平方数，简称平方数. 零也可称为平方数.

2. 完全平方数的个位数字只可能是0,1,4,5,6,9之一，被3除的余数只可能是0或1，被5除的余数只可能是0，±1或0,1,4.

3. 若完全平方数为偶数，则必为4的倍数；若完全平方数为奇数，则必被8除余1.

4. 当且仅当一个数是完全平方数时，它的正约数个数是奇数.

证明　设 a 是平方数，可设

$$a = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_r^{2\beta_r},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 为素数. 根据乘法原理，a 有奇数

$$(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_r+1)$$

个正约数. 反之，设 a 的正约数个数为奇数. 设

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

a 的正约数个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1),$$

故 $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \cdots, \alpha_{r+1}$ 均为奇数，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 都是偶数. 所以 a 为平方数.

例题精讲

例1　已知 p 是素数，$2p^4 - p^2 + 16$ 是平方数，试求 p.

解　平方被3除的余数只能是0或1. 如果 p 不能被3整除，则 $2p^4 - p^2 + 16$ 被3除时余2，不可能为平方数. 如果 p 可被3整除，则

素数 $p=3$. 此时

$$2p^4-p^2+16=2\times3^4-3^2+16=169,$$

为平方数. 故 $p=3$.

例 2 已知 M 是一个百位数,其中有 99 位上数字是 5,问:M 能不能是平方数?

解 假设 M 是平方数,分两种情形:

(i) M 的个位数字是 5,于是十位数字只能是 2,百位上数字应为 5. 令 $A=10a+5$(a 为正整数),有

$$A^2=(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

可见个位数字为 5 的平方数的百位数字为偶数,矛盾. 因此,M 的个位数字不能是 5.

(ii) M 的个位数字为 x, $x\neq5$, 即 $M=\overline{\underbrace{55\cdots5}_{99个}x}$注意到 M 的十位数字为 5,则 M 的个位数字为 6,否则 M 不能是平方数. 于是 $3\mid M$, $9\nmid M$,矛盾.

综上所述,M 不是平方数.

例 3 试问:能否找到四个正整数,使得其中每两个数的乘积与 1998 的和都是平方数?

解 由 $(2k)^2=4k^2$, $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$, 可知正整数的平方被 4 除的余数只能是 0 或 1.

如果存在四个满足题设要求的整数,注意到 1998 被 4 除余 2,则其中每两个数的积被 4 除余 2 或 3. 因此,这四个整数中至多只能有一个偶数. 对于其中的三个奇数,必有两个被 4 除的余数相同,它们的积被 4 除的余数为 1,与 1998 的和不可能是平方数. 所以不存在四个满足题设要求的正整数.

例 4 一个正整数,如果加上 100 是一个平方数,如果加上 168,则是另一个平方数,求这个正整数.

解 设所求正整数为 x,依题设,有

$$x+100=m^2, \qquad ①$$

$$x+168=n^2, \qquad ②$$

其中 m,n 都是正整数.

②－①得 $$n^2-m^2=68,$$

即 $$(n-m)(n+m)=2^2\times 17. \qquad ③$$

因 $n-m,n+m$ 具有相同的奇偶性,由③知 $n-m,n+m$ 都是偶数.注意到 $0<n-m<n+m$,由③可得

$$\begin{cases} n-m=2, \\ n+m=2\times 17. \end{cases}$$

解得 $n=18$. 代入②得 $x=156$,即为所求.

例 5 A 是一个四位平方数,各位数字均小于 7,A 的每一位数字增加 3 后仍是一个平方数,求 A.

解 设 $A=a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$,其中 a,b,c,d 均为非负整数,$1\leqslant a\leqslant 6,0\leqslant b,c,d\leqslant 6$. 依题设,可设 $A=n^2$(n 为正整数),且可设

$$m^2=(a+3)\cdot 10^3+(b+3)\cdot 10^2+(c+3)\cdot 10+(d+3),$$

m 为正整数. 于是

$$m^2-n^2=3333,$$

即 $$(m+n)(m-n)=3\times 11\times 101.$$

注意到 $n^2\leqslant 6666$,即 $n\leqslant 81$,且 $m+n>m-n>0$,故 $m+n=101,m-n=33$,可解得 $n=34$. 于是 $A=1156$.

例 6 已知 n 是一个正整数,$A=n^2-19n+91$ 是一平方数,求 A.

解 $$A=(n-9)^2+10-n=(n-10)^2+n-9. \qquad ①$$

(i) 由①知,当 $n>10$ 时

$$(n-10)^2<n^2-19n+91<(n-9)^2,$$

可见 A 介于两相邻平方数中间,这不可能.

(ii) 当 $n<9$ 时,由①知

$$(9-n)^2<n^2-19n+91<(10-n)^2,$$

同样,A 介于两相邻平方数中间,不可能.

(iii) 当 $n=9$ 或 10 时，$A=1$.

综上所述，$A=1$.

例 7 求一个最大的平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个平方数，要求划掉的两个数字中至少有一个不是零.

解 设 $N=n^2$ 满足题设要求．可设 $N=100a^2+b$（a 是正整数，$0<b<100$），则 $n\geqslant 10a+1$. 进而，有

$$100>b=n^2-100a^2\geqslant(10a+1)^2-100a^2=20a+1,$$

故 $a\leqslant 4$.

当 $a=4$ 时，若 $n>41$，则

$$n^2-40^2=b\geqslant 42^2-40^2>100,$$

不可能，故 $n\leqslant 41$. $n=41$ 时，$n^2=1681$. 故 $N=1681$ 为所求.

例 8 一个正整数若能表为两个正整数的平方差，则称这个正整数为"智慧数"，比如 $16=5^2-3^2$，16 就是一个"智慧数". 在正整数中从 1 开始数起，试问第 1998 个"智慧数"是哪个数？并请你说明理由.

解 1 不能表为两个正整数的平方差，所以 1 不是"智慧数". 对于大于 1 的奇正整数 $2k+1$，有 $2k+1=(k+1)^2-k^2(k=1,2,\cdots)$. 所以大于 1 的奇正整数都是"智慧数".

对于被 4 整除的偶数 $4k$，有 $4k=(k+1)^2-(k-1)^2(k=2,3,\cdots)$. 即大于 4 的被 4 整除的数都是"智慧数"，而 4 不能表示为两个正整数平方差，所以 4 不是"智慧数".

对于被 4 除余 2 的数 $4k+2(k=0,1,2,3,\cdots)$，设 $4k+2=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，其中 x,y 为正整数，当 x,y 奇偶性相同时，$(x+y)(x-y)$ 被 4 整除，而 $4k+2$ 不被 4 整除；当 x,y 奇偶性相异时，$(x+y)(x-y)$ 为奇数，而 $4k+2$ 为偶数. 总得矛盾. 所以不存在自然数 x,y，使得 $x^2-y^2=4k+2$. 即形如 $4k+2$ 的数均不为"智慧数".

因此，在正整数列中前四个正整数只有 3 为"智慧数"，此后，每连续四个数中有三个"智慧数".

因为 $1998=(1+3\times 665)+2$，$4\times(665+1)=2664$，所以 2664 是

第 1996 个"智慧数",2665 是第 1997 个"智慧数",注意到 2666 不是"智慧数",因此 2667 是第 1998 个"智慧数",即第 1998 个"智慧数"是 2667.

例 9 求出所有这样的自然数,它等于其所有因数的个数的平方.

解 设 $n=m^2$,其中 m 为 n 的因数的个数.若 $m=1$,则 $n=1$.若 $m>1$,则 n 的异于 m 的因数可配成对,每对因数的积等于 n.设所能配成的对数为 k,则 $m=2k+1$,是奇数. $n=(2k+1)^2$ 且有 k 个小于 m 的因数,它们又都是奇数.这表明 $2k-1$ 是 $n=(2k+1)^2$ 的因数,注意到 $(2k-1,2k+1)=1$,惟有 $2k-1=1$,即 $k=1$.此时 $(2k+1)^2=9$.因此,满足题设要求的正整数为 1 和 9.

练 习 十

一、填空题

1. 末三位相同且不为零的最小平方数是______.

2. 在小于 100 的正整数中含有奇数个正因数的有______个.

3. 使和 $4n^2+5n$ 为平方数的正整数 $n=$______.

4. 使 $4^{27}+4^{1000}+4^x$ 成为平方数的最大整数 $x=$______.

二、解答题

5. 已知矩形四边的长都是小于 10 的整数,用这些长度数可以构成一个四位数,这个四位数的千位数字与百位数字相同,并且这个四位数是一个平方数,则这个矩形的面积有多大?

6. 已知 n 是正整数,d 是 $2n^2$ 的正约数.证明:n^2+d 不是平方数.

7. 求证:四个连续自然数之积不是平方数.

8. 求证:五个连续自然数的平方和不是平方数.

9. 假若 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 和 b 都是整数,且满足

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2,$$

求证:这些数不能都是奇数.

10. 求证:形如 25,1225,112225,11122225,…,$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots2}_{n+1个2}5$ 的数都是完全平方数.

11. 已知 n 为正整数,2^8+2^n 为平方数,求 n 的值.

12. 若 x, y 都是正整数. 试证:x^2+y+1 与 y^2+4x+3 的值不能同为平方数.

第十一讲　不定方程

知识点和方法述要

1.一般地，当未知数的个数多于方程的个数且方程的解受到某种限制的方程(组)称为不定方程(组).这里我们主要研究的是一些求整数解的不定方程(组).

2.求不定方程的整数解，则要充分注意整数的基本性质，仔细观察、分析方程(组)的结构.常需采用因数(式)分解、配方、不等式夹逼等手段收缩探索范围、逐步逼近目标.

例题精讲

例1　求方程 $x^2-12x+y^2+2=0$ 的整数解.

解　原方程可变为

$$(x-6)^2+y^2=34. \qquad ①$$

由①可知 y^2 只可能为 0,1,4,9,16,25.经验证只有 $y^2=9$ 或 25 时，$34-y^2$ 为平方数.此时 $(x-6)^2=25$ 或 9.故所求整数解为

$\begin{cases}x_1=11,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=11,\\y_3=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\y=-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=-5.\end{cases}$

例2　求不定方程 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$ 的所有正整数解.

解　原方程可变为

$$y^2+3x^2y^2-30x^2-10=507,$$

即

$$(y^2-10)(3x^2+1)=3\times13^2.$$

因 $3x^2+1>1$ 且 $3\nmid 3x^2+1$，故 $3\mid y^2-10$，有

$$\begin{cases} y^2-10=3, \\ 3x^2+1=13^2; \end{cases} \text{或} \begin{cases} y^2-10=13, \\ 3x^2+1=39. \end{cases}$$

解之,可得$\begin{cases} x=2, \\ y=7. \end{cases}$故所求的正整数解为(2,7).

例 3 求方程 $x^3+11^3=y^3$ 的正整数解.

解 原方程可变为

$$(y-x)(x^2+xy+y^2)=11^3. \qquad ①$$

因 $y>x\geqslant1$,若 $11\mid y-x$,则 $y-x\geqslant11$,有 $y>11,x^2+xy+y^2>11^2$,可见①没有正整数解.因此,由①得

$$\begin{cases} y-x=1, & ② \\ x^2+xy+y^2=11^3. & ③ \end{cases}$$

由②得 $y=x+1$,代入③得

$$x^2+x(x+1)+(x+1)^2=11^2,$$

即

$$3x^2+3x=1330. \qquad ④$$

由 $3\nmid1330$,$3\mid3x^2+3x$ 可见④无整数解.所以原方程无正整数解.

例 4 用 100 元买 100 只鸡,公鸡每只 5 元,母鸡每只 3 元,小鸡 3 只 1 元,问:最多可买公鸡多少只?

解 设所买公鸡数为 x,母鸡数为 y,小鸡数为 z,则

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{1}{3}z=100, & ① \\ x+y+z=100. & ② \end{cases}$$

①×3－②得

$$7x+4y=100. \qquad ③$$

由③可知 $4\mid7x$,又 $(4,7)=1$,故 $4\mid x$.又由③可知 $7x\leqslant100$,即 $x<15$,因此 $x\leqslant12$.

当 $x=12$ 时,由③可得 $y=4$.代入①可得 $z=84$.故最多可买公鸡 12 只.

例 5 求方程 $2^w+2^x+2^y+2^z=20.625$ 的满足条件的 $w>x>y>z$ 的整数解.

解一 原方程两边同乘以 8 可变为

$$2^{w+3}+2^{x+3}+2^{y+3}+2^{z+3}=165. \qquad ①$$

注意到 165 为奇数，$z+3<y+3<x+3<w+3$，必有 $z+3=0$，即 $z=-3$.

把 $z=-3$ 代入①，且两边同减去 1 后再除以 4，得

$$2^{w+1}+2^{x+1}+2^{y+1}=41. \qquad ②$$

同理可得 $y=-1$，代入②得

$$2^{w+1}+2^{x+1}=40. \qquad ③$$

由③可得

$$2^{w-2}+2^{x-2}=5.$$

同理可得 $x=2$. 进而得 $w=4$.

所求方程的解为 $w=4, x=2, y=-1, z=-3$.

解二 将 20.625 表示为 2 的整数幂的和为

$$2^{w}+2^{x}+2^{y}+2^{z}=2^{4}+2^{2}+2^{-1}+2^{-3}. \qquad ④$$

注意到 $w>x>y>z$，根据④只可能有解 $w=4, x=2, y=-1, z=-3$.

例 6 证明：不定方程 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ 无整数解.

证明 原方程可变为

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4+1^4=1600. \qquad ①$$

对于任意整数 x，若 x 为偶数 $2t$，则 $x^4=16t^4$，有 $16 \mid x^4$；若 x 为奇数 $2t+1$，则

$$x^2=(2t+1)^2=4t(t+1)+1,$$

被 8 除余 1. 令 $x^2=8k+1$（k 为整数），则

$$x^4=(8k+1)^2=64k^2+16k+1.$$

被 16 除余 1. 因此，若 $x_1, x_2, \cdots, x_{14}$ 均为整数，则①式左边被 16 除的余数 r 满足 $1 \leqslant r \leqslant 15$，而①式右边可被 16 整除. 故原方程无整数解.

例 7 求方程 $x^6+3x^3+1=y^4$ 的整数解.

解 当 $x>0$ 时，

$$(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1=y^4$$

$$< x^6+4x^3+4=(x^3+2)^2,$$

所以 $x^3+1<y^2<x^3+2$. 这与 y 为整数相矛盾.

当 $x\leqslant -2$ 时,

$$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4<x^6+3x^3+1=y^4$$
$$<x^6+2x^3+1=(x^3+1)^2,$$

有 $\quad -x^3-2=|x^3+2|<y^2<|x^3+1|=-(x^3+1),$

也与 y 为整数相矛盾.

当 $-2<x\leqslant 0$ 时,若 $x=-1$,则 $y^4=-1$,这不可能;若 $x=0$,则 $y^4=1$,可得 $y=\pm 1$.

综上所述,所求整数解为$\begin{cases}x=0,\\y=1;\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$

例 8 求不定方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}$的整数解.

解 因 x,y,z 是正整数,且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}<1$,所以 x,y,z 都大于 1.

不妨设 $1<x\leqslant y\leqslant z$,则$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$,于是

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}.$$

即
$$\frac{1}{x}<\frac{5}{6}\leqslant\frac{3}{x}.$$

所以,$\frac{6}{5}<x\leqslant\frac{18}{5}$. 于是 $x=2$ 或 3.

当 $x=2$ 时,

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y},$$

即$\frac{1}{y}<\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{y}$,所以 $3<y\leqslant 6$. 将 $x=2,y=4,5,6$ 代入原方程可得 $z=12,\frac{2}{15},6$,故原方程正整数解为$(x,y,z)=(2,4,12),(2,6,6)$.

当 $x=3$ 时,由

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2},$$

得
$$\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y},$$

即 $2<y\leqslant4$. 将 $x=3, y=3,4$ 代入原方程可得 $z=6,4$. 故原方程又有正整数解 $(x,y,z)=(3,3,6),(3,4,4)$.

根据对称性,原方程共有 15 组整数解:$(x,y,z)=(2,4,12),(2,12,4),(4,2,12),(4,12,2),(12,2,4),(12,4,2),(2,6,6),(6,2,6),(6,6,2),(3,3,6),(3,6,3),(6,3,3),(3,4,4),(4,3,4),(4,4,3)$.

例 9 一批旅客决定分乘几辆大汽车,要使每车有同样的人数.起先,每车乘坐 22 人,发现有 1 人坐不上车.若是开走一辆空车,那么所有的旅客刚好平均分乘余下的汽车.已知每辆车的容量不多于 32 人,问:原有多少辆汽车?这批旅客有多少人?

解 设原有 k 辆汽车,开走一辆空车后留下的每车乘 n 个人.显然 $k\geqslant2, n\leqslant32$,旅客人数为 $22k+1$. 另一方面,旅客人数又是 $n(k-1)$人,故

$$22k+1=n(k-1), \qquad ①$$

即
$$n=\frac{22k+1}{k-1}=\frac{22(k-1)+23}{k-1}=22+\frac{23}{k-1}, \qquad ②$$

可见 $k-1|23$. 只可能是 $k-1=1$ 或 23,即 $k=2$ 或 24. 当 $k=2$ 时,$n=45>32$,与题意不符;当 $k=24$ 时,$n=23$,满足题设要求.这时旅客人数为

$$n(k-1)=23\times23=529.$$

答 原有汽车 24 辆,旅客 529 人.

注 (1)如①,②式变形中先用一个未知数的分式表达另一个未知数,进而分离出部分整数,使得剩余的部分易于利用整除性讨论、解决问题的方法是一种常用的方法.

(2)由①可得 $nk-n-22k=1$,即$(n-22)(k-1)=23$. 由此可得 $n-22=1, k-1=23$ 或 $n-22=23, k-1=1$,可得同样结果.

练习十一

一、填空题

1. 方程 $13x+3y=28$ 的正整数解 $(x,y)=$______.

2. 方程 $2x+5y=xy-1$ 的正整数解 (x,y) 的个数是______.

3. 用100元恰好买了三种笔100支，其中金笔每支10元，依金笔每支3元，圆珠笔每支0.5元，则金笔买了______支.

4. 有面额为壹圆、贰圆、伍元的人民币共10张，全部用来购买一把价值为18元的雨伞，则至多有不同的付款方式______种.

5. $\frac{a}{3},\frac{b}{4},\frac{c}{6}$ 为三个既约真分数（a,b,c 为正整数）. 如果这三个分数的分子都加上 c，分母不变，则所得3个分数的和为6，则原来3个既约分数的乘积是______.

二、解答题

6. 现将若干个零件放入至少10个盒子内，要求每个盒子装的零件个数相同. 如果每盒装12个，结果剩一个零件未装；如果盒子再增加3个，所有零件恰好装在各个盒子内．问：原有多少个盒子？多少个零件？

7. 求 $\begin{cases} x^2+y-z=100 \\ x+y^2-z=124 \end{cases}$ 的正整数解 (x,y,z).

8. 求方程 $14x^2-24xy+21y^2+4x-12y-18=0$ 的整数解.

9. 求满足方程 $x^3+y^4=z^5$ 的一组正整数解 (x,y,z). 试问这个方程的正整数解能否多于10个？试说明理由.

10. 求方程 $5x-3y=-7$ 的整数解，使 $60<x+y<80$.

11. 满足方程 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{(x+1)y}=\frac{1}{1991}$ 的正整数解 (x,y) 有多少组？

第十二讲　整数的奇偶性分析

知识点和方法述要

1. 把整数分成奇数、偶数两大类是一种最简单、最基本的分类. 在不少问题中,重要的往往不是那些数的具体数值而是它们的奇偶性,利用奇数和偶数的各自特性则可方便、快捷地解决问题,包括一些看上去比较难的题目,甚至收到意想不到的效果. 这种利用奇偶数性质解题的方法我们称之为奇偶分析.

2. 运用奇偶分析的方法时,通常可将偶数记作 0, 奇数记作 1. 等式:$0+0=0, 1+1=0, 0+1=1$,正好分别表明偶数 + 偶数 = 偶数,奇数 + 奇数 = 偶数,偶数 + 奇数 = 奇数.

可以看到,将一个奇数加到任一整数 a 上去,则改变了 a 的奇偶性,而将一个偶数加到任一整数 a 上去,并不改变 a 的奇偶性.

3. 当两种个数有限的对象之间的建立起一一对应的关系,那么表明这两种对象个数相等,个数的总和为偶数. 以上结论我们称之为对偶性原则.

4. 运用奇偶分析方法时要注意从不同角度考察同一对象,发掘局部与整体间隐含的数量关系.

例题精讲

例 1　设 $1,2,3,\cdots,9$ 的任一排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$. 求证:$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$ 是一个偶数.

证一　因

$$(a_1-1)+(a_2-2)+(a_3-3)+\cdots+(a_9-9)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_9)-(1+2+\cdots+9)$$

$=0$,

是偶数，所以，$(a_1-1),(a_2-2),\cdots,(a_9-9)$这9个数中必定有一个是偶数．否则，便得奇数个(9个)奇数的和为偶数，这不可能．从而可知

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$$

是偶数．

证二 由于1,2,…,9中只有4个偶数，所以a_1,a_3,a_5,a_7,a_9中至少有一个是奇数，于是，$a_1-1,a_3-3,a_5-5,a_7-7,a_9-9$至少有一个是偶数，从而$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是偶数．

例2 在一张9行9列的方格纸上，把每个方格所在的行数与列数加起来，填在这个方格中，如图12－1中，$a=5+3=8$．问：填入的81个数中，奇数多还是偶数多？

图12－1

解 将每一行与第二行的数比较，同一列的两个数奇偶性正好相反，这是因为第一行的数是列数加1，而第二行的数是列数加2．因此，第一行的奇数(偶数)个数，正好等于第二行的偶数(奇数)个数．这两行合在一起看，奇数与偶数个数一样多．

同理，前八行两两配对，奇数个数与偶数个数一样多．

第九行的9个数是列数加9．因列数1,2,…,9中奇数比偶数多1，故这9个数中偶数比奇数多1．

因此，填入的81个数中，偶数比奇数多1个．

例3 设$a_1,a_2,\cdots,a_{64}$是正整数1,2,…,64的任意一种排列．令

$b_1=|a_1-a_2|,b_2=|a_3-a_4|,\cdots,b_{32}=|a_{63}-a_{64}|$;

$c_1=|b_1-b_2|,c_2=|c_3-c_4|,\cdots,c_{16}=|b_{31}-b_{32}|$;

$d_1=|c_1-c_2|,d_2=|d_3-d_4|,\cdots,b_8=|c_{15}-c_{16}|$;

…　　　　　　　　…

这样一直作下去，最后得到一个整数x．求证：x为偶数．

证一 假设 x 是奇数,那么上述计算过程中倒数第二步里的两个数必然是一奇一偶. 再往前推一步,得知倒数第三步里的四个数只能或是三奇一偶,或是一奇三偶,总之只能是奇数个奇数. 依此推知,在计算过程中的每一步里,只能有奇数个奇数,连"初始状态"也不例外,但由于它们是 1,2,…,64 的某一排列,其中奇数的个数为 32 个,这是一个偶数,这就产生了矛盾. 这个矛盾说明最后一步得出的整数 x,只能是一个偶数.

证二 我们知道,$|a-b|$ 与 $a+b$ 奇偶性相同. 由此可知,上述计算的第一步中,32 个数

$$|a_1-a_2|,|a_3-a_4|,\cdots,|a_{63}-a_{64}|$$

分别与下列 32 个数

$$a_1+a_2,a_3+a_4,\cdots,a_{63}+a_{64}$$

有相同的奇偶性. 这就是说,在只考虑奇偶性的时候,可以不注意绝对值符号,而且可以用"和"代替"差". 这样可以把原来的计算过程改为

第一步:$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_{61},a_{62},a_{63},a_{64}$,

第二步:$a_1+a_2,a_3+a_4,\cdots,a_{61}+a_{62},a_{63}+a_{64}$,

第三步:$a_1+a_2+a_3+a_4,\cdots,a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}$,

……

现在的问题是:要决定最后一步所得出的那一个整数的奇偶性.

很明显,最后那一个数是 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}$. 由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{64}$ 是 1,2,…,64 的一个排列,因此它们的总和为 $1+2+\cdots+64$ 是一个偶数. 故最后一个整数是偶数.

例 4 将图 12-2 中的圆圈任意涂上红色或蓝色. 问:有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数? 请说明理由.

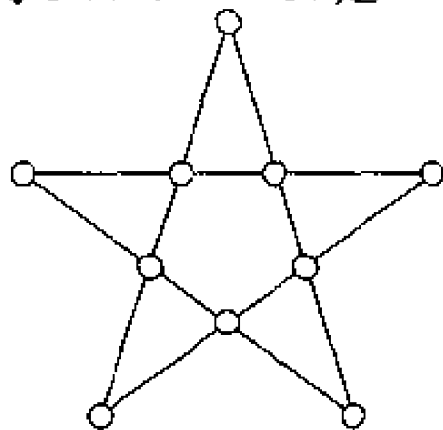


图 12-2

解 假设能够使同一条直线上的红圈数都是奇数,一共 5 条直线,将这 5 条直线上的红圈数相加,所得的和仍是奇数.

另一方面,每一个红圈恰好属于两条直线.所以,在上述所说的和中,每一个红圈都被计算了两次,和应当是红圈总数的两倍,因而是一个偶数.

以上两方面的结果产生矛盾.这表明不可能使同一条直线上的红圈数都是奇数.

例 5 在 $n\times n$(n 为奇数)方格表里的每一个方格中任意填上一个 $+1$ 或 -1,在每一列的下面写上该列所有数的乘积,在每行的右面写上该行所有数的乘积,求证:这 $2n$ 个乘积的和不等于 0.

证明 设每列下面的数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,每行右面的数为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,依题设,这些数都是 $+1$ 或 -1.

假若这 $2n$ 个乘积的和为 0,即

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+b+b+\cdots+b_n=0,$$

那么,这 $2n$ 个数中 $+1$ 和 -1 的个数一样多,都是 n 个.又因为 $a_1a_2\cdots a_n$ 和 $b_1b_2\cdots b_n$ 都表示 $n\times n$ 方格表里所有数的乘积,即

$$a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n.$$

所以 $$a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n=(a_1a_2\cdots a_n)^2=1.$$

这表明 $2n$ 个数中 -1 的个数为偶数,即 n 为偶数.这与 n 为奇数矛盾.所以,这 $2n$ 个乘积的和不等于 0.

例 6 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的绝对值都为 1,且

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0.$$

试证:$4\mid n$.

证明 令 $\frac{x_i}{x_{i+1}}=y_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 且 $\frac{x_n}{x_1}=y_n$.因 $|x_i|=1$,故 $|y_i|=1$.

设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中有 a 个 1,b 个 -1,则

$$a+b=n, \qquad ①$$

且 $$y_1+y_2+\cdots+y_n=a-b=0. \qquad ②$$

由①,②知 $a=b=\frac{n}{2}$.又

$$y_1y_2\cdots y_n=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_1}=1,$$

即
$$1^a\cdot(-1)^b=1,$$

所以 b 为偶数.令 $b=2m$(m 为整数),则 $n=2b=4m$.所以 $4|n$.

例 7 某电影院共有 1985 个座位.某天,这家电影院上、下午各演一场电影.看电影的是甲、乙两所中学的各 1985 名学生(同一个学校的学生有的看上午场,也有的看下午场).试证明:电影院一定有这样的座位,这天看电影时上、下午在这个座位上坐的是两个不同学校的学生.

证明 甲、乙两校看电影的学生都是 1985 人,电影院的座位也恰是 1985.作如下统计

	上午场	下午场
甲校	n 个座位	$(1985-n)$个座位
乙校	$(1985-n)$个座位	n 个座位

假设每个座位上、下午坐的都是同一学校的学生.对每个学校上午场与下午场人数应相等,则

$$n=1985-n.$$

即
$$2n=1985.$$

这不可能.所以,至少存在这样一个座位,上、下午坐的是甲、乙不同校的学生.

例 8 27 名小运动员所穿运动服的号码恰是 1,2,3,…,26,27 这 27 个自然数.问:这些小运动员能否站成一个圆圈,使得任意相邻的两个运动员号码数之和都是质数?说明理由.

解一 不能.不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于 2 的偶数,它必是合数.所以,要使任意相邻的两个运动员号码之和都是质

数，这些质数必都是奇数.因此，相邻两运动员号码必定奇偶性相反.这样一来，运动员必须号码奇偶相间地排成一圈，这表明号码为奇数的运动员与号码为偶数的运动员个数必相等.因此，运动员总数为偶数个.这与运动员个数是奇数(27)不符.所以，题设要求的站圈的排列方式是不能办到的.

解二 不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于2的偶数.所以要使任意两个运动员号码数之和都是质数，这些质数必定都是奇数.这样，一方面由于相邻的运动员号码和的和是27个奇数的和，它应是个奇数.另一方面，这个和又等于$2\times(1+2+3+\cdots+26+27)$是个偶数.导致矛盾.因此，题设要求的站圈排列方式不能办到.

例9 表甲是一个英文字母电子显示盘，每一次操作可以使某一行4个字母同时改变，或者使某一列4个字母同时改变.改变的规则是：按照英文字母表的顺序，每个英文字母变成它下一个字母(即A变成B，B变成C，…，最后的字母Z变成A).

表甲	表乙
S O B R	*K B D S*
T Z F P	*H E X G*
H O C N	*R T B S*
A D V X	*C F Y A*

问：能否经过若干次操作，使表甲变成表乙？如果能，请写出变化过程；如果不能，说明理由.

分析 26个字母可以用1～26这26个数来表示，如果从奇偶性考虑，则一半是奇数，一半是偶数.为简便起见，我们又将表示为奇数的字母：A,C,E,G,I,K,M,O,Q,S,U,W、Y记作1，将表示为偶数的字母：$B,D,F,H,J,L,N,P,R,T,V,X,Z$记作0.这样一来表甲、表乙又可分别写成

1 1 0 0	1 0 0 1
0 0 0 0	0 1 0 1
0 1 1 0	0 0 0 1

1000　　　　1011

表丙　　　　表丁

每次操作则将同一行或同一列的 1 改为 0,0 改为 1.

由于每一行(列)有 4 个数,故其中 1 的个数 a 与 0 的个数 $b(=4-a)$有相同的奇偶性.每次操作将 1 与 0 互换,从而个数 a 与 b 互换,所以操作的结果不改变 1 的个数的奇偶性.

表丙中,原有 5 个 1,无论经过多少次操作,表中 1 的个数始终为奇数.而表丁中,1 的个数为 8.这表明表丙不可能经过上述操作变为表丁,即表甲不可能经过上述操作变为表乙.

练 习 十 二

1.能否自 1 起把前 50 个自然数分成两组,使第一组所有数的和与第二组所有数的和相等?说明理由.

2.将两个正整数的差乘上它们的积,能否得到数 45045?

3.在一次象棋比赛中,每两个选手恰好比赛一局,每局赢者记 2 分,输者记 0 分,平局每个选手各记一分.今有 4 个人统计了这次比赛中全部得分总数,由于有的人粗心,其数据各不相同,分别为 1979,1980,1984,1985.经核实,其中有一人统计无误.问这次比赛共有多少名选手参加?

4.在黑板上写上 1,2,…,1993,只要黑板上还有两个或两个以上的数就擦去其中的任意两个数 a,b,并写上$|a-b|$,问最后黑板上剩下的数是奇数还是偶数?

5.桌上有七只茶杯,杯口全部朝上,每次翻动是指将其中四个茶杯同时翻转.问:能否经过若干次翻动,使杯口全部朝下?

6.设 a,b 是正整数,且

$$(11111+a)(11111-b)=123456789.$$

求证:$4|a-b$.

7.设 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997},x_{1998}$都是 $+1$ 或 -1,试证:$x_1+2x_2+3x_3+$

$\cdots + 1998x_{1998} \neq 0$.

8. 证明：改变一个自然数各位数码的顺序后得到的数与原数之和不能等于$\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}$.

9. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均取值 +1 或 -1，且

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_nx_1x_2x_3 = 0.$$

试证：$4 \mid n$.

10. 代数式

$$rvz - rwy - suz + swx + tuy - tvx$$

中，$r, s, t, u, v, w, x, y, z$ 可以分别取 +1 或 -1.

(1)证明代数式的值都是偶数；

(2)求这个代数式所能取得的最大值.

第十三讲　全等三角形

知 识 点 和 方 法 述 要

1.三角形全等判定公理

(1)**边角边公理**　有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

(2)**角边角公理**　有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等.

推论　有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等(简称“角角边”定理).

(3)**边边边公理**　有三边对应相等的两个三角形全等.

关于直接三角形,有:

(4)**斜边、直角边公理**　有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

2.证明两个三角形全等一般是先找出这两个三角形中已知或容易证明相等的对应角和边,再根据判定公理确定还需证明相等的哪些对应的角和边,然后设法加以证明.

三角形全等的证明中要防止产生“边边角”“角角角”的错误.

3.全等三角形的判定公理及推论,是进一步研究平面几何的基础,如全等三角形所有对应边和角相等可利用来证明线段和角相等以及它们的和差倍分、直线的平行和垂直等.

4.(1)把一个角分成两个相等的角的射线叫做角的平分线.

(2)在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

(3)到角的两边的距离相等的点,在这个角的平分线上.

5.线段的倍或分的证明问题,一般采用以下两种方法:

(1)短线加倍法:即把短线加倍后,证明它与长线相等;

(2)长线等分法:即把长线等分之后,证明其中的一份与短线相等．有时可用作图法直接加倍或等分,而有时则引出辅助线,证明某线段就是加倍或等分之后的线段．

对于线段的和、差的证明问题,也采用与上述类似的“截长”或“补短”法．

例 题 精 讲

例1 如图13-1,已知 CD、BE 相交于 A,M 是 BC 的中点,$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$. 求证 $\triangle BMD \cong \triangle CME$.

分析 要证明 $\triangle BMD \cong \triangle CME$,我们先找出这两个三角形中相等的角和边:$\angle 1=\angle 2$,$BM=CM$,还需证另一对角相等或证 $MD=ME$.但证另一对角相等很困难,我们考虑证明 $MD=ME$. 它可通过证明 $\triangle DMC \cong \triangle EMB$ 得到,而这不难由已知条件证出．

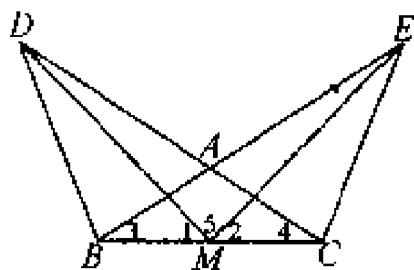


图 13-1

在 $\triangle MDC$ 和 $\triangle MEB$ 中,$\angle 3=\angle 4$, $MC=MB$, $\angle DMC=\angle 2+\angle 5=\angle 1+\angle 5=\angle EMB$. 所以 $\triangle MDC \cong \triangle MEB$. 从而 $MD=ME$.

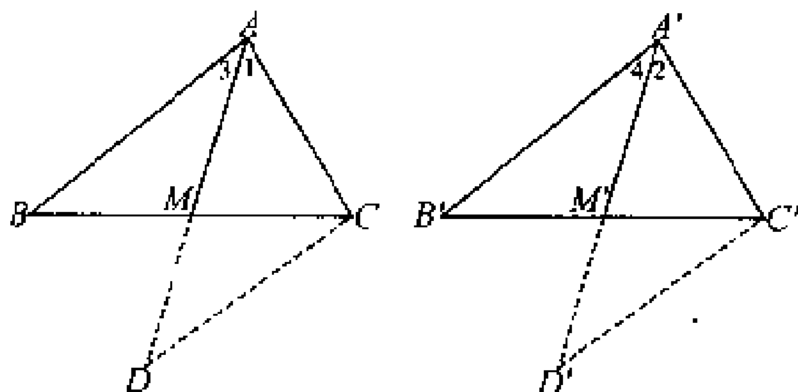


图 13-2

在 $\triangle BMD$ 和 $\triangle CME$ 中,$MD=ME$,$\angle 1=\angle 2$,$MB=MC$,故 $\triangle BMD \cong \triangle CME$.

例2 求证:有两边和第三边上中线对应相等的两个三角形全等．

已知:如图13-2,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$AB=A'B'$,$AC=A'$

C',AM 和 $A'M'$ 是中线,且 $AM=A'M'$.求证:$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中,已知 $AB=A'B'$,$AC=A'C'$,要证 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,尚缺 $BC=B'C'$ 或 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.而题设条件 AM、$A'M'$ 难以直接利用.注意到 M、M' 分别为 BC、$B'C'$ 的中点,有 $BM=MC$,$B'M'=M'C'$,分别延长 AM、$A'M'$ 至 D、D',便得 $AM=MD$,$A'M'=M'D'$,连 CD、$C'D'$,这样做易见 $\triangle ABM\cong\triangle DCM$,$\triangle A'B'M'\cong\triangle D'C'M'$,又将题设有关线段集中起来构造了一对全等三角形:$\triangle ADC$、$\triangle A'D'C'$,进而可得 $\angle D=\angle 3$,$\angle D'=\angle 4$,$\angle 1=\angle 2$(如图),于是有 $\angle ABC=\angle A'B'C'$.

例 3 如图 13-3,已知:C 为 AB 中点,$\angle ACE=\angle BCD$,$CD=CE$,求证:$CH=CG$.

分析 要证明 $CH=CG$,只需证明 $\triangle ACH\cong\triangle BCG$ 或 $\triangle DCH\cong\triangle ECG$.对于这两对三角形,题设条件直接给出的都是"一个角或一条边对应相等",若能证明 $\angle A=\angle B$ 或 $\angle D=\angle E$,即可导致问题解决.

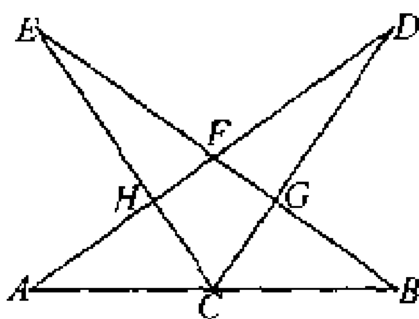


图 13-3

事实上,因 $\angle ACE=\angle BCD$,故

$$\angle ACE+\angle ECD=\angle BCD+\angle DCE,$$

可得 $\angle ACD=\angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,$AC=BC$,$\angle ACD=\angle BCE$,$CD=CE$,所以 $\triangle ACD\cong\triangle BCE$,有 $\angle A=\angle B$.

在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle BCG$ 中,$\angle A=\angle B$,$AC=BC$,$\angle ACH=\angle BCG$,所以 $\triangle ACH\cong\triangle BCG$,有 $CH=CG$.

例 4 已知:如图 13-4,$BE=CD$,$\angle 1=\angle 2$.求证:$BD=CE$.

分析 仅由边边角:$BE=CD$,$BC=BC$,$\angle 1=\angle 2$ 不能直接推导出 $\triangle BEC\cong\triangle CDB$,也就不能由此直接得出 $BD=CE$.换个角度:若能证明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$,则有 $AB=AC$,$AE=AD$,也就可以得到

$BD = CE$.

因$\angle 1 = \angle A + \angle 4$，$\angle 2 = \angle A + \angle 3$，又$\angle 1 = \angle 2$，故$\angle 3 = \angle 4$.

在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中，$\angle A = \angle A$，$\angle 3 = \angle 4$，$BE = CD$，所以$\triangle ABE \cong \triangle ACD$. 从而有$AB = AC$，$AE = AD$，进而得$AB - AD = AC - AE$，即$BD = CE$.

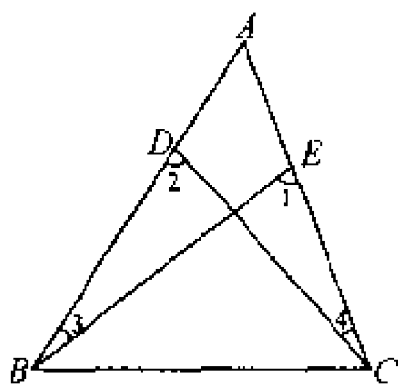


图 13－4

例5 如图 13－5，BE、CF是$\triangle ABC$的高，在BE或其延长线上取点P，使$BP = AC$，在CF或其延长线上取点Q，使$CQ = AB$. 连AP、AQ，求证：$AP = AQ$，$AP \perp AQ$.

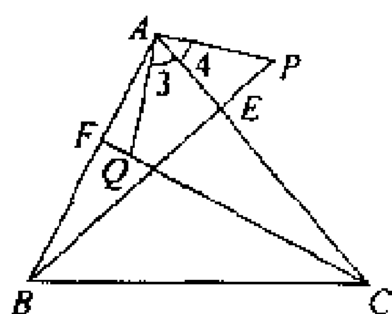


图 13－5

证明 因$CF \perp AB$，$BE \perp AC$，故$\angle 1 = 90° - \angle BAC = \angle 2$.

在$\triangle PAB$和$\triangle AQC$中，$BP = AC$，$\angle 1 = \angle 2$，$AB = CQ$，故$\triangle PAB \cong \triangle AQC$，有$AP = AQ$，$\angle 3 = \angle P$. 又因$\angle 4 + \angle P = 90°$，所以$\angle 3 + \angle P = 90°$. 从而$AP \perp AQ$.

例6 如图 13－6，B、E是线段AC、AD上的点，且$AB = AE$，$AC = AD$，BD与CE相交于F. 求证：AF是$\angle CAD$的平分线.

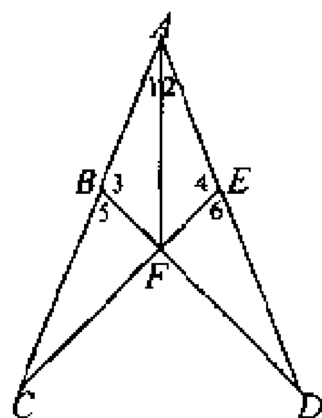


图 13－6

证明 因$AB = AE$，$AC = AD$故$BC = ED$.

在$\triangle ACE$和$\triangle ADB$中，$AC = AD$，$\angle CAE = \angle DAB$，$AE = AB$，所以$\triangle ACE \cong \triangle ADB$. 有$\angle C = \angle D$，$\angle 3 = \angle 4$，故$\angle 5 = \angle 6$.

在$\triangle BCF$和$\triangle EDF$中，$\angle 5 = \angle 6$，$BC = ED$，$\angle C = \angle D$，故$\triangle BCF \cong \triangle EDF$，从而$BF = EF$.

在$\triangle ABF$和$\triangle AEF$中，$AB = AE$，$\angle 3 = \angle 4$，$BF = EF$，故$\triangle ABF \cong \triangle AEF$，从而$\angle 1 = \angle 2$，即$AF$是$\angle CAD$的平分线.

例7 如图 13－7，C为线段AB上的点，DA、EB、CF均垂直于

AB,且 $DA = CB$,$EB = AC$,$CF = AB$.求证:$\angle AFD = \angle BFE$.

分析 从图形看,$\angle AFD$ 与 $\angle BFE$ 既不在同一三角形中,也不在两个全等三角形中,很难直接证明它们相等,但可从证明 $\angle AFE$ 与 $\angle BFD$ 相等着手.连 DB、AE,将这两个角放在 $\triangle DFB$ 与 $\triangle EFA$ 中去证明.

连 DB、AE.因 $DA = CB$,$AB = CF$,$\angle DAB = \angle BCF = 90°$,故 $\triangle DAB \cong \triangle BCF$,有 $BD = BF$,$\angle DBA = \angle BFC$,$\angle FBD = \angle FBC + \angle DBA = 90°$,所以 $\angle BFD = 45°$.同理 $\angle AFE = 45°$.所以,$\angle AFE = \angle BFD$,即 $\angle AFD + \angle DFE = \angle DFE + \angle EFB$.从而,有 $\angle AFD = \angle EFB$.

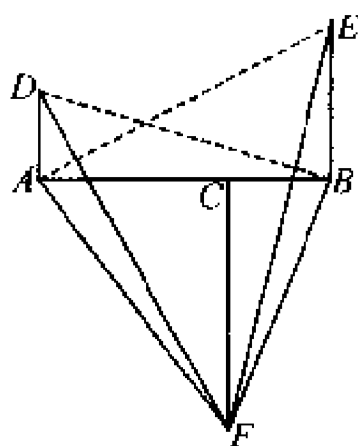


图 13-7

例 8 如图 13-8,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B = 60°$,角平分线 AD、CE 相交于 O,求证:$AE + CD = AC$.

分析 在 AC 上截取 $AF = AE$,问题变为证明 $CD = CF$,这一目标可通过证明 $\triangle CDO \cong \triangle CFO$ 达到.显见 $\angle 3 = \angle 4$,CO 公共.再从题设条件看,$\angle B = 60°$,故 $\angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 60°$.进而,有 $\angle 5 = 60°$,所以 $\angle 8 = 60°$.又从点 F 的作法易知 $\triangle AOE \cong \triangle AOF$,从而有 $\angle 6 = \angle 5$,因 $\angle AOC = \angle 6 + \angle 7 = 120°$,所以 $\angle 7 = 60°$,于是 $\angle 7 = \angle 8$,$\triangle CDO \cong \triangle CFO$.

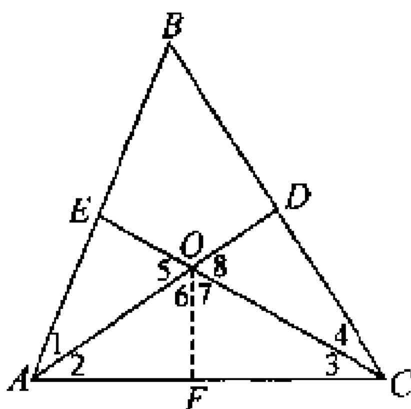


图 13-8

例 9 如图 13-9 所示,$\angle BAC = 90°$,$AB = AC$,M 是 AC 边的中点,$AD \perp BM$ 交 BC 于 D,交 BM 于 E,求证:$\angle AMB = \angle DMC$.

分析一 观察现有图形,$\angle AMB$ 与 $\angle DMC$ 所在的 $\triangle AME$ 与 $\triangle DMC$ 不全等.注意到 $AM = MC$,$\angle C = \frac{1}{2}\angle BAC = 45°$,作 $\angle BAC$

的平分线 AC,交 BM 于 G,根据所要证明的事实:$\angle AMB=\angle DMC$,可以想到应有 $\triangle AMG \cong \triangle CMD$,而一旦我们证明了 $\triangle AMG \cong \triangle CMD$,则问题也就得以解决. 因此,我们把着眼点放在证明 $AG=DC$ 或 $GM=MD$. 图形及题设条件启发我们应优先考虑证明 $AG=DC$,因为这可从 $\triangle AGB \cong \triangle CDA$ 着手.

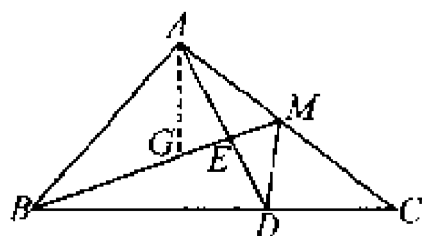


图 13-9

在 $\triangle AGB$ 与 $\triangle CDA$ 中,因 $AB=CA$,$\angle BAG=\angle ACD=45°$,$\angle ABG=90°-\angle AMB=\angle MAD$,所以 $\triangle ABG \cong \triangle CAD$. 有 $AG=DC$.

在 $\triangle AMG$ 和 $\triangle CMD$ 中,$AM=MC$,$\angle C=\angle MAG=45°$,$AG=DC$,故 $\triangle AMG \cong \triangle CMD$,有 $\angle CMD=\angle AMB$.

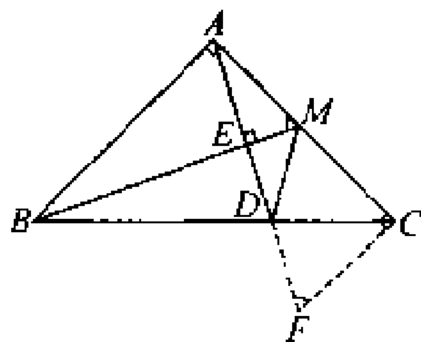


图 13-10

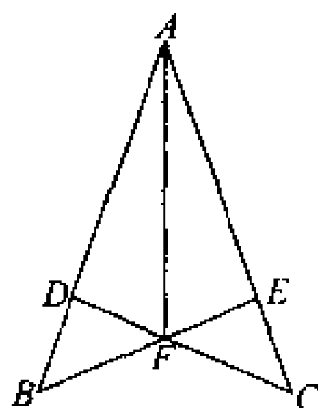
分析二 如图 13-10 所示. 注意到在 Rt$\triangle ABM$ 中,因 $AE \perp BM$,有 $\angle MBA$,若延长 AE,过 C 作 $CF \perp AC$ 交 AD 延长线于 F,可构成 Rt$\triangle ABM \cong$ Rt$\triangle CAF$,从而有 $\angle AMB=\angle F$. 设法证明 $\angle DMC=\angle F$,则问题获解.

过 C 作 $CF \perp AC$,交 AD 延长线于 F,在 Rt$\triangle ABM$ 和 Rt$\triangle ACF$ 中,$\angle ABM=90°-\angle AMB=\angle CAF$,$AB=AC$,故 Rt$\triangle ABM \cong$ Rt$\triangle CAF$,有 $\angle AMB=\angle F$,$CF=AM$. 因 $\angle MCB=\angle BCF=45°$,$CM=MA=CF$,故 $\triangle CMD \cong \triangle CFD$,有 $\angle F=\angle CMD$. 所以 $\angle AMB=\angle DMC$.

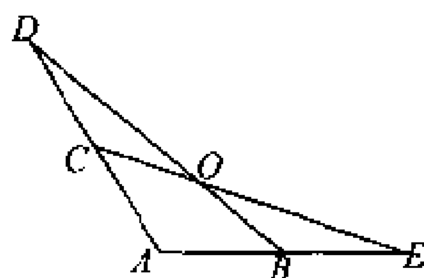
练 习 十 三

一、填空题

1. 如图,若 $AB=AC$,$AD=AE$,BE 与 CD 相交于 F,则图中全等三角形共有____对.



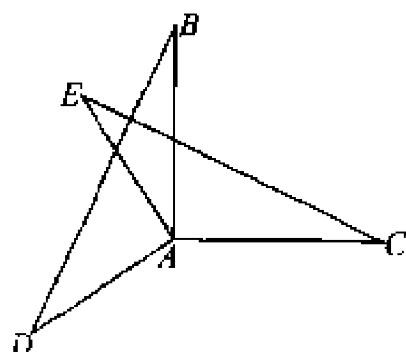
(第 1 题)



(第 2 题)

2.如图,若$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,$AD=5$,$AB=2$,则 $CD=$____.

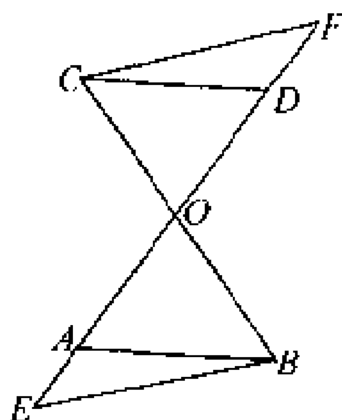
3.如图,若 $AB\perp AC$,$AB=AC$,$BD=CE$,$AD=AE$,则$\angle DAE=$____.



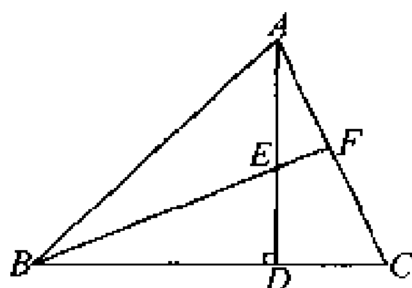
(第 3 题)

二、解答题

4.如图,已知 $AB\parallel CD$,$OA=OD$,BC 过 O 点,点 E、F 在直线AOD 上,且 $AE=DF$.求证:$EB\parallel CF$.



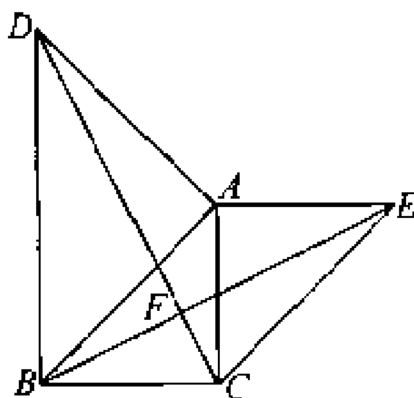
(第 4 题)



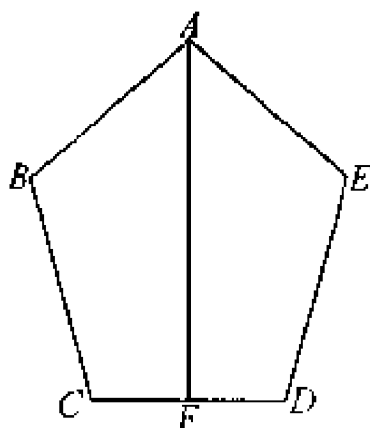
(第 5 题)

5.如图,在$\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的高,$AD=BD$,$DC=DE$,BE 的延长线交AC 于 F.求证:$BF\perp AC$.

6.如图,$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 是等腰直角三角形,$\angle BAD$ 与$\angle CAE$ 是直角.求证:$BE=CD$,且 $BE\perp CD$.



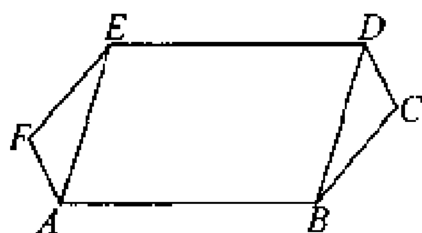
（第 6 题）



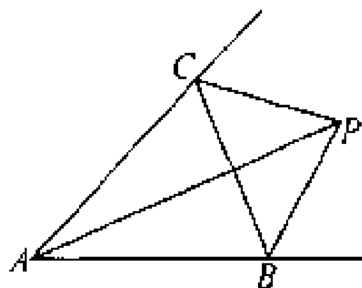
（第 7 题）

7. 如图，已知 $AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$，F 是 CD 的中点．求证：$AF\perp CD$．

8. 如图，$AB\parallel ED$，$AE\parallel BD$，$AF=CD$，$EF=BC$．求证 $\angle C=\angle F$．



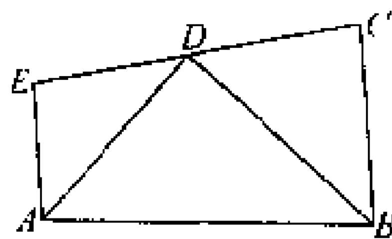
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，$\triangle ABC$ 的两条外角平分线 BP、CP 交于 P．求证：P 点也在 $\angle BAC$ 的平分线上．

10. 如图，已知 $AE\parallel BC$，AD、BD 平分 $\angle EAB$、$\angle CBA$，CE 过点 D，求证：$AB=AE+BC$．



（第 10 题）

11. 已知：在 $\angle AOB$ 的 OA 边上取两点 P 和 S，再在 OB 边上取两点 Q 和 T，使 $OP=OQ$，$OT=OS$，PT 和 QS 相交于 X，求证：OX 平分 $\angle AOB$．

12.在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$的平分线交AC边于点M，$\angle BCA$的邻补角的平分线交AB边的延长线于点P，连MP，交边BC于点K，试求$\angle AKM$的度数.

第十四讲　等腰三角形

知识点和方法述要

1.(1)三角形中,有两边相等的三角形叫做等腰三角形,其中相等的两边都叫做腰,另一边叫做底边,两腰的夹角叫做顶角,腰与底边的夹角叫做底角.

(2)等腰三角形的判定　如果一个三角形有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等.

(3)等腰三角形的性质　(ⅰ)底角相等;(ⅱ)顶角的平分线、底边上的高、中线互相重合.

2. 三边都相等的三角形叫做等边三角形.

(1)等边三角形的判定　(ⅰ)三个角都相等的三角形是等边三角形;(ⅱ)有一个角等于$60°$的等腰三角形是等边三角形.

(2)等边三角形的各角相等,都等于$60°$.

3. 垂直于一条线段并且平分这条线段的直线,叫做这条线段的垂直平分线,简称中垂线.

定理　线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等.

逆定理　和一条线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

例题精讲

例1　如图14-1,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$,BE平分$\angle ABC$,G为EF的中点.求证:$AG\perp EF$.

分析　因G为EF的中点,欲证$AG\perp EF$,只须证明$AE=AF$.

因$\angle BAC=90°$，故$\angle 1+\angle AEB=90°$，又$AD\perp BC$，可得$\angle 2+\angle 3=90°$，因 BE 平分$\angle ABC$，有$\angle 1=\angle 2$，而$\angle 3=\angle 4$，故$\angle 4=\angle AEF$. 于是 $AF=AE$. 又 G 为 EF 的中点，所以 $AG\perp EF$.

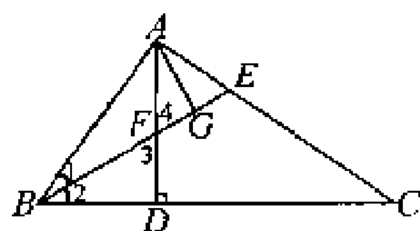


图 14－1

例 2 如图 14－2，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle C$，$AD\perp BC$，延长 AB 到 E，使 $BE=BD$，延长 ED 到 F，交 AC 于 F. 求证：$AF=DF=CF$.

分析 欲证 $AF=DF=CF$，只需证明$\triangle ADF$ 和$\triangle FDC$ 分别为等腰三角形.

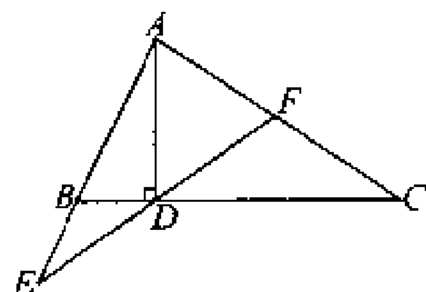


图 14－2

因 $BE=BD$，所以$\angle BED=\angle BDE$，又$\angle BDE=\angle FDC$，所以，

$\angle ABC=\angle BED+\angle BDE=2\angle BDE=2\angle FDC$，

而$\angle ABC=2\angle C$，所以$\angle FDC=\angle C$，$DF=CF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\angle ADF+\angle FDC=90°$，$\angle DAC+\angle C=90°$，$\angle FDC=\angle C$，故$\angle DAC=\angle ADF$，有 $AF=DF$.

综上所述，$AF=DF=CF$ 成立 .

例 3 在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC<\angle BCA$，$\angle ABC$ 是钝角，又已知$\angle BAC$ 与$\angle ABC$ 的外角平分线（自 A、B 到对边延长线上的交点）之长都等于 AB. 求$\angle BAC$ 的大小.

解 如图 14－3，设$\angle BAC$ 与$\angle ABC$ 的外角平分线分别是 AD 和 BE，又设$\angle BAC=\alpha$，则$\angle BAM=180°-\alpha$，从而

$$\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAM=90°-\frac{\alpha}{2}.$$

因 $AD=AB$，故，

$$\angle 2=\frac{1}{2}(180°-\angle 1)=45°+\frac{\alpha}{4},$$

从而，可得

$$\angle CBN=\angle 2=45^\circ+\frac{\alpha}{4},$$

$$\angle 3=\frac{1}{2}\angle CBN=\frac{45^\circ}{2}+\frac{\alpha}{8}.$$

因 $AB=BE$,所以$\angle E=\angle CAB=\alpha$,由$\angle 3=\angle CAB+\angle E$ 可得

$$\frac{45^\circ}{2}+\frac{\alpha}{8}=\alpha+\alpha,$$

解得 $\alpha=12^\circ$,即为所求.

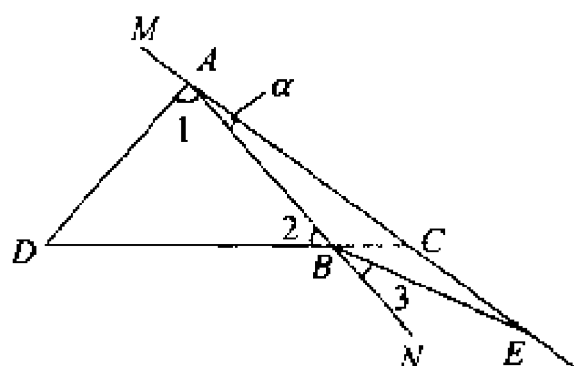


图 14-3

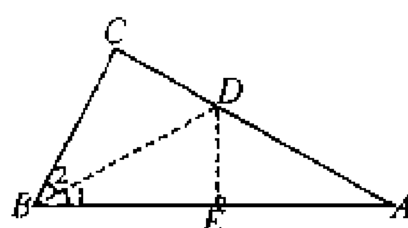


图 14-4

例 4 如图 14-4,在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=2\angle A$,$AB=2BC$.求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明 作$\angle B$ 的平分线 BD 交 AC 于 D,作 $DE\perp AB$,垂足为 E.

因$\angle B=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$,又$\angle B=2\angle A$,所以$\angle 1=\angle A$,有 $DA=DB$.因 $DE\perp AB$,所以 $BE=EA=\frac{1}{2}AB$.又因 $AB=2BC$,所以 $BC=\frac{1}{2}AB$.故 $BE=BC$.

在$\triangle BDE$ 与$\triangle BDC$ 中,$\angle 1=\angle 2$,$BE=BC$,$BD=BD$.所以$\triangle BDE\cong\triangle BDC$.故$\angle BCD=\angle BED=90^\circ$,即$\triangle ABC$ 为直角三角形.

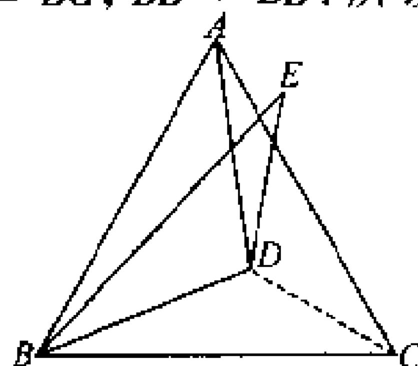


图 14-5

例 5 如图 14-5,在等边三角形 ABC 内取一点 D,使 $DA=DB$,又在$\triangle ABC$ 外取一点 E,使$\angle DBE=\angle DBC$,且 $BE=BA$.求$\angle BED$ 的度数.

分析 在$\triangle BDE$ 中无法直接求出

$\angle BED$,注意题设条件中有较多对相等线段,因此,可利用三角形全等得到$\angle BED=\angle BCD$.连结 DC.$\triangle ABC$ 为等边三角形,有 $AB=BC=CA$.因 $BE=BA$,所以 $BE=BC$.又$\angle DBE=\angle DBC$,$BD=BD$,故$\triangle DBE\cong\triangle DBC$,有$\angle BED=\angle BCD$.因 $AD=BD$,$BC=AC$,$DC=DC$,可知$\triangle ADC\cong\triangle BDC$,有

$$\angle BCD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=30^\circ.$$

例 6 如图 14-6,$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的外角平分线交 BC 的延长线于点 D,过 BC 的中点 M 作 AD 的平行线交 AB 于 E、交 AC 的延长线于 F.求证:$BE=CF$.

分析 注意到 M 为 BC 的中点,作 $CG\parallel AB$,交 EF 于 G.这样做,构造了与$\triangle BME$ 全等的$\triangle CMG$,从而把 BE"移"至与 CF 共顶点位置,使求证中的线段处于一个便于比较的位置上.

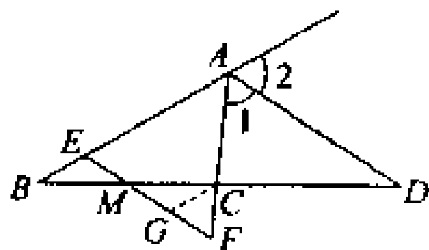


图 14-6

$\triangle BME\cong\triangle CMG$,有 $BE=GC$.又 $EF\parallel AD$,所以$\angle F=\angle 1$,$\angle AEF=\angle 2$.因$\angle 1=\angle 2$,所以$\angle AEF=\angle F$.又$\angle AEF=\angle CGF$,所以$\angle CGF=\angle F$,有 $CG=CF$.从而可得 $BE=CF$.

例 7 已知$\triangle ABC$ 是等边三角形,延长 BC 到 D,再延长 BA 到 E,使 $AE=BD$,求证:$CE=DE$.

证一 如图 14-7,延长 BD 到 F,使 $DF=BC$.连结 EF,依题设,有

$$BF=BD+DF=AE+AB=BE,$$

又$\angle B=60^\circ$,故$\triangle BEF$ 是一个等边三角形.

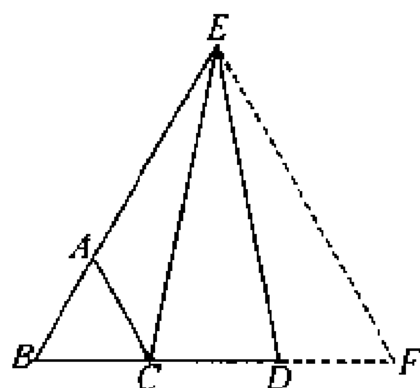


图 14-7

在$\triangle BCE$ 和$\triangle FDE$ 中,$EF=EB$,$\angle F=\angle B$,$DF=BC$,故$\triangle ECB\cong\triangle EDF$,有 $CE=DE$.

证二 如图 14-8,作 $DG\parallel CA$,交 BE 于

G，则$\angle BDG=\angle DGB=\angle B=60°$，故$\triangle BDG$为等边三角形.

在$\triangle CAE$和$\triangle EGD$中，$\angle 4=\angle 3=120°$，$AE=BD=DG$，又$AE=AG+GE$，$BD=BC+CD$，$CD=AG$，可知$GE=BC=AC$，所以$\triangle CAE\cong\triangle EGD$.从而得$CE=DE$.

图 14－8

例 8 如图 14－9，$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，$AB+BD=AC$，求$\angle B:\angle C$.

解 延长AB到E，使$BE=BD$，连结EC，则

$AE=AB+BE=AB+BD=AC$.

延长AD交EC于F，因AD平分$\angle BAC$，所以AF为EC的垂直平分线，有$DE=DC$，故$\angle 3=\angle 4$.连结DE，因$\angle ABC=\angle 1+\angle 2$，又$\angle 2=\angle 3+\angle 4$，所以$\angle 1=\angle 3+\angle 4$，有

图 14－9

$$\angle ABC=2(\angle 3+\angle 4)=4\angle 3. \quad ①$$

又$\angle ACE=\angle AEC$，所以$\angle 1+\angle 3=\angle ACB+\angle 4$，可得

$$\angle ACB=\angle 1=2\angle 3. \quad ②$$

由①，②得

$$\angle ABC:\angle ACB=4\angle 3:2\angle 3=2:1,$$

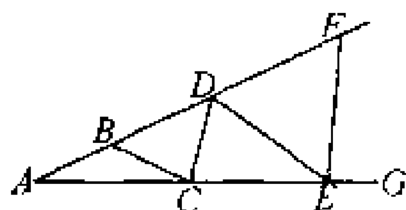
即$\angle B:\angle C=2:1$.

练 习 十 四

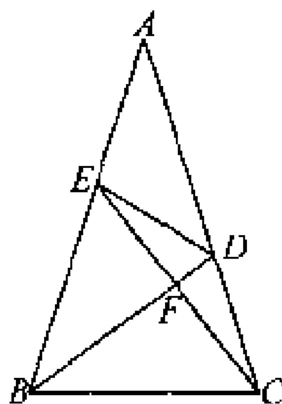
一、填空题

1.如图，B、D在AF上，C、E在AG上，且$AB=BC=GD$，$EC=ED=EF$.若$\angle A=25°$，则$\angle FEG$等于______.

2.如果等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为45°，那么这个等腰三角形的底角为________.



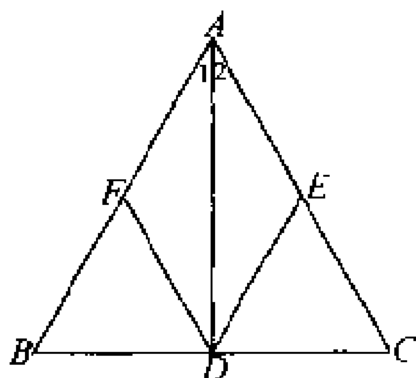
（第1题）



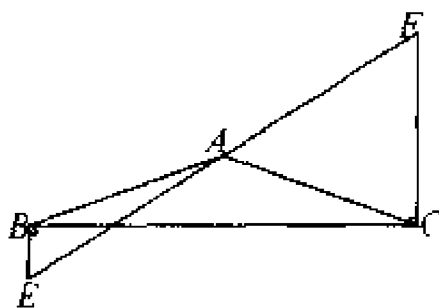
（第3题）

3.在$\triangle ABC$中，$\angle A=36°$，$\angle ACB=72°$，BD平分$\angle ABC$，交AC于D，$CE\perp BD$交AB于E，则图中等腰三角形的个数有______.

4.如图，在$\triangle ABC$中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle EDC=\angle BAC$，$AE=AF$，$\angle B=60°$.则图中的线段AF、BF、AE、CE、AD、BD、DC、DF中与DE的长相等的线段有____条.



（第4题）



（第5题）

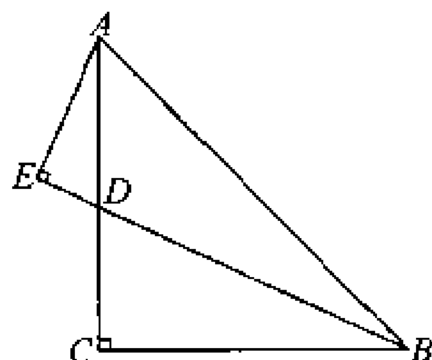
二、解答题

5.如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，EF为过点A的任一直线，$CF\perp BC$，$BE\perp BC$.求证：$AE=AF$.

6.$\triangle ABC$中，最大边AC是最小边AB的两倍.又如其中一个内角是另一个内角的两倍．若$\triangle ABC$不是钝角三角形，求证：$AB\perp BC$.

7.如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D为AC上一点，AE垂直于BD

的延长线于 E，且 $AE=\frac{1}{2}BD$. 求证：BD 平分 $\angle ABC$.

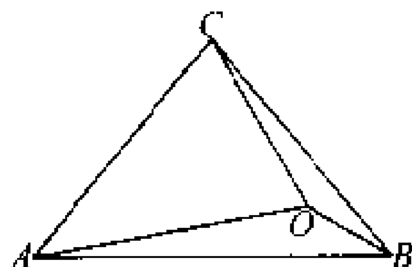


(第 7 题)

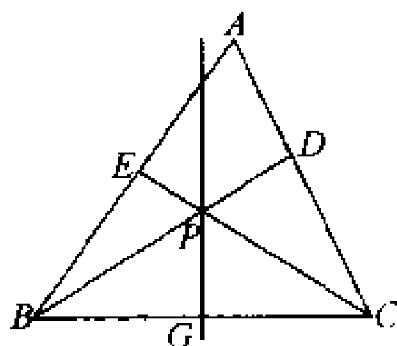
8. 在凸五边形 $ABCDE$ 中，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle D$，$BC=DE$，M 为 CD 的中点，求证：$AM\perp CD$.

9. 已知 AD 是等腰三角形一腰上的高，$\angle DAB=60°$，求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=80°$，O 为 $\triangle ABC$ 内一点. 若 $\angle OAB=10°$，$\angle ABO=30°$，求 $\angle ACO$ 的度数.



(第 10 题)



(第 12 题)

11. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，顶角 $A=20°$，在边 AB 上取点 D，使 $AD=BC$. 求 $\angle BDC$ 的度数.

12. 如图，P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边垂直平分线上的一点，且 $\angle PBC=\frac{1}{2}\angle A$. BP、CP 的延长线分别交 AC、AB 于 D、E. 求证：$BE=CD$.

第十五讲　直角三角形

知识点和方法述要

1.(1)直角三角形的两个锐角互余.

(2)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

2.如果直角三角形的一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

3.(1)定理及其逆定理　(ⅰ)交换一个命题的题设和结论,所得到的命题与原命题是互逆命题;(ⅱ)原命题是真命题,它的逆命题不一定也是真命题.如果经过证明原命题和逆命题都是真命题,那么它们组成一对互逆定理.

(2)(ⅰ)勾股定理　直角三角形的两直角边 a,b 的平方和等于斜边 c 的平方,即 $a^2+b^2=c^2$.

(ⅱ)勾股定理的逆定理　如果三角形的三边长 a,b,c 有以下关系:$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

例题精讲

例1　如图15-1,在Rt△ABC中,$CD\perp AB$,CE为AB边上的中线,$\angle BCD:\angle ACD=3:1$.若$CD=5$cm,求$DE$的长.

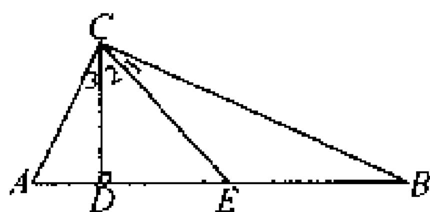


图15-1

解　因CE是斜边AB上的中线,故$CE=EB=\frac{1}{2}AB$,$\angle 1=\angle B$.因$CD\perp AB$,$\angle C=90°$,所以$\angle 3+\angle DCB=\angle B+\angle DCB=90°$,可得$\angle 3=\angle B$.所以$\angle 1=\angle 3$.依题设,$\angle BCD:\angle ACD=3:1$,即$\angle 2=2\angle 1=\frac{1}{2}$

$\angle ACB=45°$,于是$\angle DEC=45°$,所以 $DE=CD=5\text{cm}$.

例 2 如图 15-2,在 Rt$\triangle ABC$ 中,CM 是斜边 AB 上的中线,$MN\perp AB$,$\angle ACB$ 的平分线 CN 交 MN 于 N,求证:$CM=MN$.

分析一 只需证明$\angle N=\angle NCM$.注意到 $AM=MC$,$\angle NCM=45°-\angle ACM=45°-\angle A$,故可尝试通过计算得到$\angle N=45°-\angle A$.

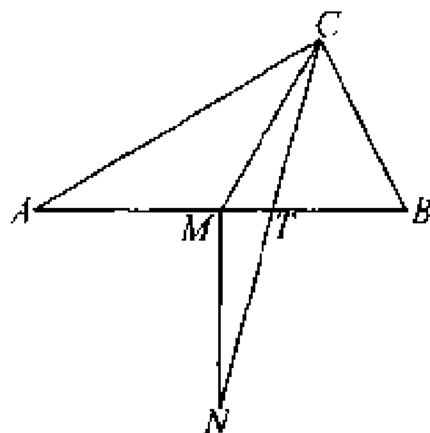


图 15-2

因 $MN\perp AB$,故$\angle NMT=90°$,又$\angle BCA=90°$,CT 平分$\angle ACB$,故进而可得

$\angle N=90°-\angle MTN=90°-\angle CTB=90°-(\angle A+\angle ACT)=45°-\angle A$.

分析二 如图 15-3,同分析一,$\angle MCN=45°-\angle A$.在 Rt$\triangle ABC$ 中,作 $CD\perp AB$,垂足 D,有$\angle BCD=\angle A$,于是$\angle DCN=45°-\angle DCB=45°-\angle A$,故$\angle MCN=\angle DCN$.剩下的只需证明$\angle N=\angle DCN$,而这只是举手之劳.因 $MN\perp AB$,故 $CD/\!/MN$,$\angle N=DCN$.

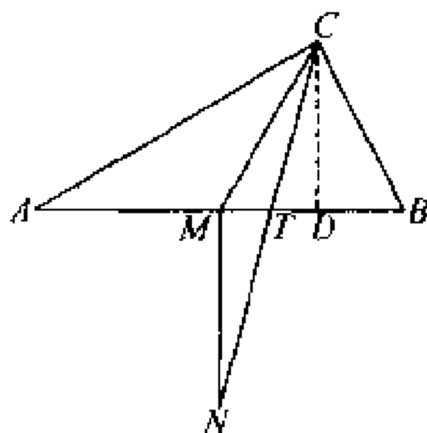


图 15-3

例 3 如图 15-4,在$\triangle ABC$ 中,BD、CE 是两条高,F、G 分别是 BC、DE 的中点,求证:$FG\perp DE$.

分析 给出 G 是 ED 的中点,注意到等腰三角形中底边上的中线也是底边上的高,要证 $FG\perp DE$,只须证得 $FE=FD$ 即可.

连接 EF、DF,在 Rt$\triangle BEC$ 与 Rt$\triangle BDC$ 中,F 为斜边 BC 中点,故 $EF=DF=\frac{1}{2}BC$,$\triangle EFD$ 为等腰三角形.因 G 为 DE 中点,所以 $FG\perp DE$.

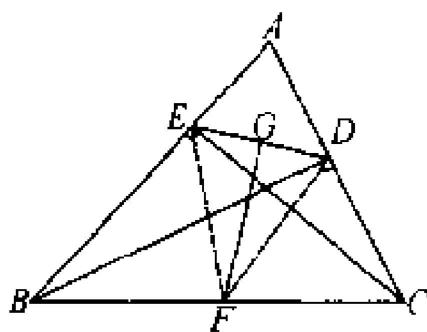


图 15-4

例 4 如图 15－5，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，E 为 AB 的中点，$CF=\frac{1}{2}AB$，FE 的延长线交 CB 的延长线于 D 点. 求证：$\angle D=\frac{1}{2}\angle A$.

证明 因 $\angle ACB=90°$，且 E 为 AB 中点，故 $CE=\frac{1}{2}AB$，又 $CF=\frac{1}{2}AB$，所以 $CE=CF=AE$，$\angle A=\angle ACE$，作 $CG\perp EF$ 于 G，则 $\angle FCG=\angle ECG=\frac{1}{2}\angle A$.

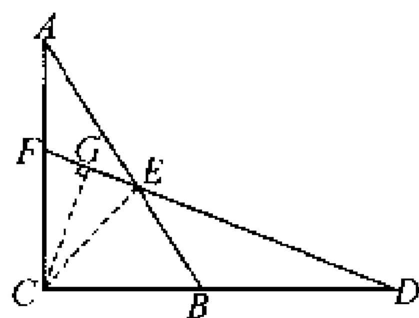


图 15－5

在 Rt$\triangle FCD$ 中，$\angle FCG+\angle DFC=\angle D+\angle DFC=90°$，可得 $\angle D=\angle FCG$. 所以

$$\angle D=\frac{1}{2}\angle A.$$

例 5 如图 15－6，$\triangle ABC$ 为等边三角形，D、E 分别是 BC、AC 边上的点，$BD=EC$，BE、AD 相交于 F，$BG\perp AD$ 于 G. 求 $\frac{BF}{FG}$ 的值.

解 因 $\triangle ABC$ 为等边三角形，有 $AB=BC=CA$，$\angle BAC=\angle C=60°$，又 $BD=EC$，所以 $CD=EA$，于是 $\triangle ABE\cong\triangle CAD$，$\angle 1=\angle 2$.

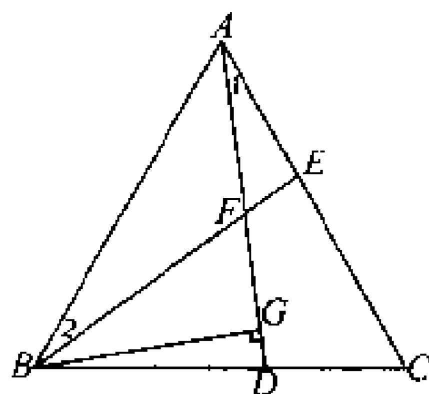


图 15－6

在 Rt$\triangle BGF$ 中，由

$$\angle BFG=\angle 2+\angle BAF=\angle 1+\angle BAF=60°,$$

得 $\angle FBG=30°$，所以 $\frac{BF}{FG}=2$.

例 6 如图 15－7，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=20°$，D 是 AB 上一点，$\angle BDC=30°$，求证：$AD=BC$.

分析 依题设，$\angle 2=10°$. 注意到 $\angle BAC=20°$，$AB=AC$，可作 $AF\perp CD$ 交 CD 的延长线于 E，易证 $CF=AE$，因此，只需证明 $AE=\frac{1}{2}AD$.

作 $AE \perp CD$，垂足为 E，作 $AF \perp BC$，垂足为 F. 因 $AB = AC$，所以 $FC = \frac{1}{2}BC$. 因 $\angle ADE = \angle 3 = 30°$，所以 $AE = \frac{1}{2}AD$.

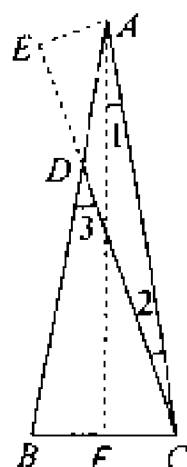


图 15－7

在 Rt$\triangle CAF$ 与 Rt$\triangle ACE$ 中，$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAC = 10°$，$\angle 2 = \angle 3 - \angle BAC = 10°$，$AC$ 公共，可知 Rt$\triangle CAF \cong$ Rt$\triangle ACE$，$CF = AE$，所以 $AD = BC$.

例 7 证明：三角形两边的平方和，等于第三边上的中线的平方与第三边一半的平方和的二倍.

已知：如图 15－8，AM 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线. 求证：$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$.

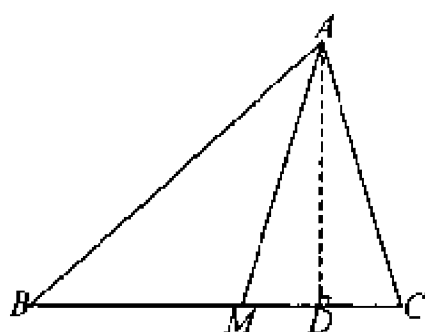


图 15－8

证明 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于 D，根据勾股定理，有

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 \\ &= (BM + MD)^2 + AC^2 - CD^2 \\ &= BM^2 + 2BM \cdot MD + MD^2 + AC^2 - (AC^2 - AD^2) \\ &= BM^2 + 2BM \cdot MD + MD^2 + AM^2 - MD^2 \\ &= BM^2 + AM^2 + 2BM \cdot MD. \end{aligned}$$

同理，在 $\triangle ACM$ 中，

$$AC^2 = MC^2 + AM^2 - 2MC \cdot MD.$$

因 $BM = MC$，所以

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2 = 2(AM^2 + BM^2)$.

例 8 如图 15－9，已知 $\angle XOY = 60°$，M 是 $\angle XOY$ 内的一点，它到边 OX 的距离 $MA = 2$，到边 OY 的距离 $MB = 11$，求 OM 的长.

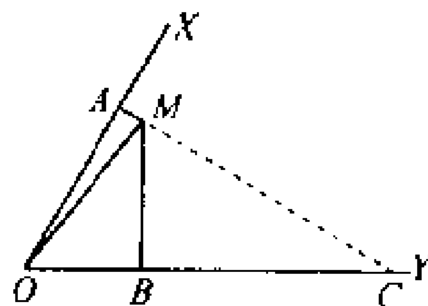


图 15－9

解 延长 AM 交 OC 于 C，则 $\angle ACO =$

30°.在 Rt△MBC 中，$MC=2MB=22$，故 $AC=AM+MC=24$. 在 Rt△CAO 中，设 $OA=x$，则 $OC=2x$. 根据勾股定理，有

$$x^2+24^2=(2x)^2,$$

解之得 $x=8\sqrt{3}$. 于是

$$OM^2=OA^2+AM^2=(8\sqrt{3})^2+2^2=196.$$

所以 $OM=14$.

例 9 如图 15－10，△ABC 三边的长分别是 $BC=17$，$CA=18$，$AB=19$. 过△ABC 内的点 P 向△ABC 的三条边分别作垂线 PD、PE、PF（D、E、F 为垂足），且 $BD+CE+AF=27$. 求 $BD+BF$ 的长.

解 设 $BD=x$，$CE=y$，$AF=z$，则 $DC=17-x$，$AE=18-y$，$FB=19-z$. 连接 PA、PB、PC. 在 Rt△PBD 和 Rt△PFB 中，有

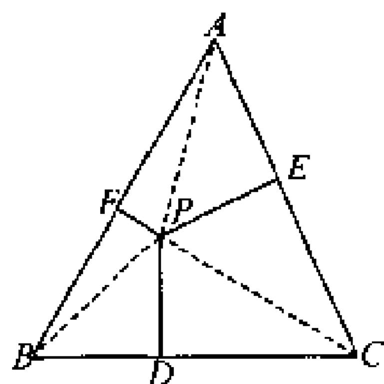


图 15－10

$$x^2+PD^2=(19-z)^2+PF^2,$$

同理，有

$$y^2+PE^2=(17-x)^2+PD^2,$$

$$z^2+PF^2=(18-y)^2+PE^2.$$

将以上三式相加，得

$$x^2+y^2+z^2=(17-x)^2+(18-y)^2+(19-z)^2,$$

即

$$17x+18y+19z=487. \quad ①$$

又

$$x+y+z=27, \quad ②$$

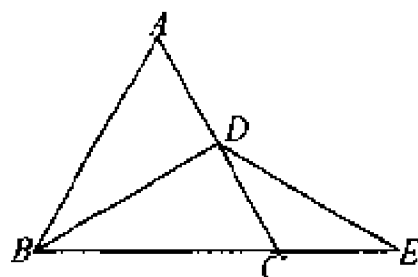
由①，②得 $x=z-1$. 于是

$$BD+BF=x+(19-z)=(z-1)+(19-z)=18.$$

练 习 十 五

一、填空题

1. 如图,已知等边△ABC的周长为6,BD是AC边上的中线,E是BC延长线上一点,$CD=CE$,那么△BDE的周长是______.



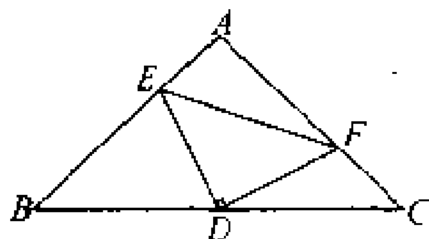
(第1题)

2. 在△ABC中,$AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,现将它折叠,使B点与C点重合,则折痕的长为______.

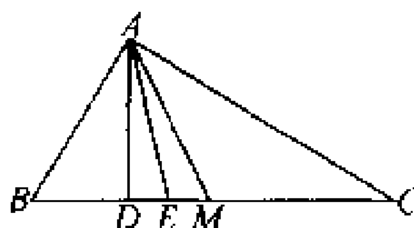
3. 在△ABC中,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$,BC边上的高为$\sqrt{3}$,则BC边的长______.

二、解答题

4. 如图,△ABC是等腰直角三角形,$AB=AC$,D是斜边BC的中点,E、F分别是AB、AC边上的点,且$DE\perp DF$,若$BE=12$,$CF=5$,求△DEF的面积.



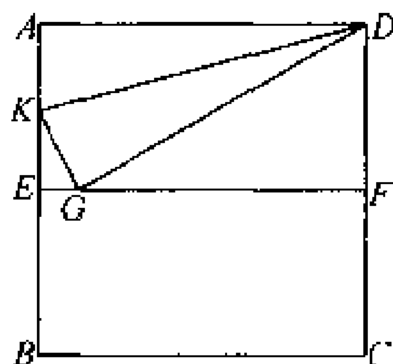
(第4题)



(第5题)

5. 如图,△ABC中,$\angle A=90°$,AM是BC边上的中线,AD是BC边上的高,AE是$\angle BAC$的平分线.求证:$\angle DAE=\angle EAM$.

6. 已知△ABC中,$\angle C=90°$,D、E分别是AC、BC边上的点,求证:$BD^2+AE^2=AB^2+DE^2$.



(第7题)

7. 如图,EF为正方形$ABCD$的对折线,将

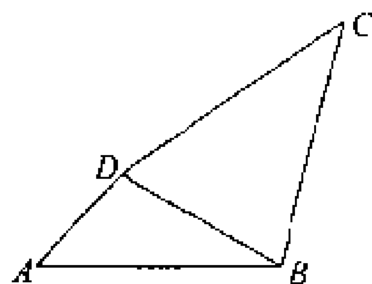
$\angle A$ 沿着 DK 折叠,使它的顶点 A 落在 EF 上的 G 点,试求$\angle DKG$ 的大小.

8. 经过$\triangle ABC$ 的顶点 A 任作一直线 AD,自 B、C 作 AD 的垂线 BD、CE、D、E 分别为垂足,M 为 BC 中点,求证:$MD = ME$.

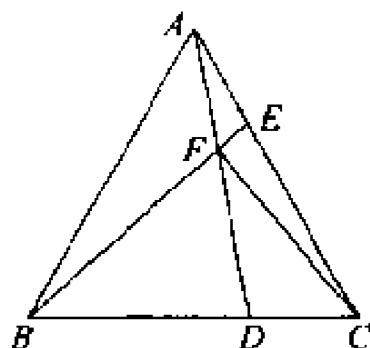
9. 在$\triangle ABC$ 中,若 AB、BC 上的高不小于其边,试求该三角形三内角的度数.

10. 如图,凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle ADB = \angle ABC = 105°$,$\angle DAB = \angle DCB = 45°$. 若 A 点到直线 BD 的距离为 101,试求 CD 的长.

11. 在等边$\triangle ABC$ 中,D、E 分别是 BC、AC 上一点,且 $AE = CD$,AD 与 BE 交于 F,$AF = \frac{1}{2}BF$,求证 $CF \perp BE$.



(第 10 题)



(第 11 题)

第十六讲　三角形中的不等式

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 三角形任意两边的和大于第三边，三角形任意两边的差小于第三边．

2. 三角形的任一外角大于其不相邻的任一内角．

3. 若三角形中两角不等，则大角对大边，小角对小边；反之也成立．

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C > \angle B$.

求证：$AB > AC$.

证明：如图 16－1，在射线 AB 上取 $AD = AC$，连结 CD. 因 $\angle C > \angle B$，故 $\angle ACD = \angle ADC = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle ACB) < \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ACB) = \angle ACB$. 这表明点 D 在边 AB 上，故 $AB > AC$.

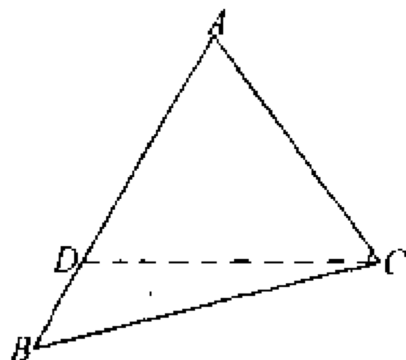


图 16－1

同样可证得逆定理．

4. 若两个三角形中有两边对应相等，夹角不等，则大角对大边，小角对小边；反之亦成立.（证明见例 5）.

5.（1）直角三角形中斜边大于直角边．

（2）直线外一点到直线引垂线和斜线

（ⅰ）垂线最短；

（ⅱ）斜线足到垂线足的距离较大的斜线较长．

例 题 精 讲

例 1 已知 P 是$\triangle ABC$ 内任意一点，a,b,c 为$\triangle ABC$ 各边.求证：

(1)$\frac{1}{2}(a+b+c)<PA+PB+PC<a+b+c$；

(2)若$\triangle ABC$ 为边长为 1 的等边三角形，则 $PA+PB+PC<2$.

证明 (1)首先，由 $PA+PB>c, PB+PC>a, PC+PA>b$，相加即得 $PA+PB+PC>\frac{1}{2}(a+b+c)$.

延长 BP 交 AC 于 Q(如图 16-2)，则

$$AB+AC=AB+AQ+QC>BQ+CQ$$
$$=BP+PQ+QC>BP+PC.$$

同理

$$BA+BC>PA+PC,$$
$$CB+CA>PB+PA.$$

相加即得

$$PA+PB+PC<AB+BC+CA=a+b+c.$$

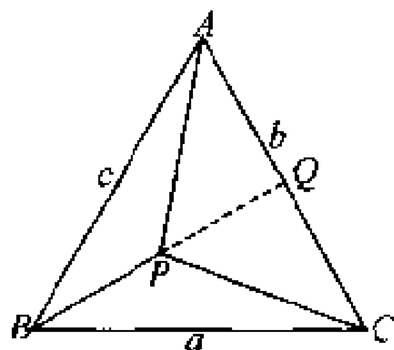


图 16-2

(2)过 P 作 $DE/\!/BC$ 交 AB、AC 于 D、E，则$\triangle ADE$ 仍为等边三角形，如图 16-3. 不妨设$\angle APD\geqslant 90°$，则有 $AD>AP$. 又 $DP+DB>PB$. $EP+EC>PC$，所以

$$PA+PB+PC<AD+DB+PD+PE+EC$$
$$=AB+AC=2.$$

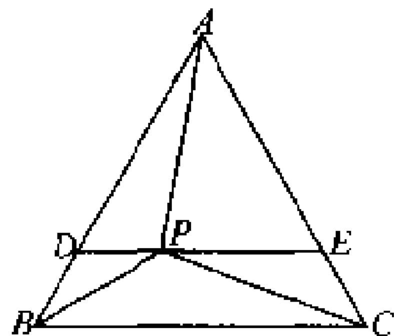


图 16-3

例 2 如图 16-4，$MN/\!/BC$，A、D 在 MN 上，且 $AB=AC$.求证：$AB+AC<BD+DC$.

分析 因 $AB=AC$，$MN/\!/BC$.易知 AN 为$\triangle ABC$ 的一条外角平分线，延长 BA 至 E，使 $AE=AC$，连 ED 则$\triangle ACD\cong\triangle AED$，有

$DC=DE$.而 $DE+DB>BE=AB+AE=AB+AC$,故命题成立.

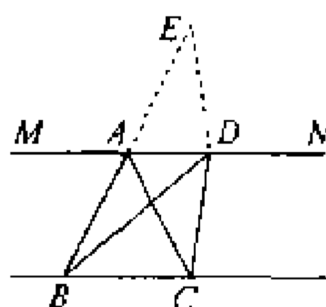


图 16-4

注 利用角平分线常可构造全等三角形,使对应线段移动到有利问题解决的位置.

例3 如图 16-5,M 是$\triangle ABC$ 中$\angle BAC$ 的平分线上任一点,$AB>AC$.求证:$MB-MC<AB-AC$.

分析 设法直接构作出 $MB-MC$ 及 $AB-AC$ 这两个差所对应的线段,并将它们集中在一个三角形中或集中在便于比较的位置上,无疑角平分线为这提供了便利.

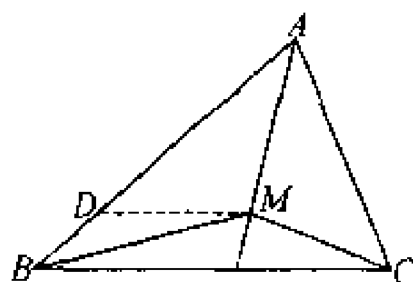


图 16-5

因 $AB>AC$,故可在 AB 上取一点 D,使 $AD=AC$,则 $BD=AB-AC$. 连接 DM. 因 $\angle DAM=\angle CAM$,AM 公共,$AD=AC$,所以$\triangle ADM\cong\triangle ACM$,有 $MD=MC$,故有 $BD>MB-MD=MB-MC$,即 $MB-MC<AB-AC$.

例4 如图 16-6,AM 是$\triangle ABC$ 的中线,$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$.求证:$EF<BE+CF$.

分析 依题设,$\angle EMF=90°$,$ME\perp MF$.又 $BM=MC$,若延长 FM 至 G,使 $FM=MG$,即可得到 $EG=EF$,并有$\triangle MCF\cong\triangle MBG$,在$\triangle BGE$ 中则集中 BE 及分别与 EF、FC 相等的线段,便可利用同一三角形中不等关系使命题获证.

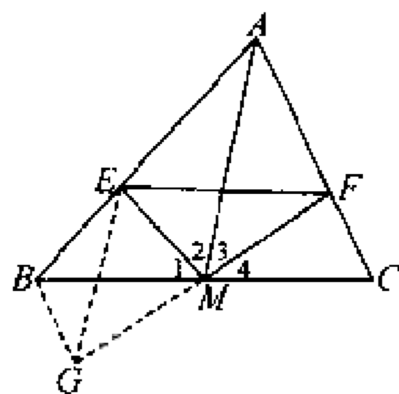


图 16-6

延长 FM 到 G,使 $MG=MF$. 连接 BG、EG. 因 $BM=MC$,$FM=GM$,$\angle FMC=\angle GMB$,所以$\triangle FMC\cong\triangle GMB$,有 $FC=BG$.

因$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,故$\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}\times 180°=90°$,即$\angle EMF=90°$,$EM\perp GF$.又 $FM=GM$,所以 EM 是 FG 的垂直平分线.因 EG

$< BE + BC$,所以 $EF < BE + CF$.

例 5 在$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中,$AB = A'B'$,$AC = A'C'$.

(1)如果$\angle A > \angle A'$,求证:$BC > B'C'$;

(2)如果 $BC > B'C'$,求证:$\angle A > \angle A'$.

证明 (1)将$\triangle A'B'C'$移放到$\triangle ABC$处,使 $A'B'$与 AB 重合,且使 $A'C'$与 AC 都在 AB 的同一侧.因$\angle A > \angle A'$,故 $A'C'$应落在$\angle A$的内部.设此时$\triangle A'B'C'$另有$\triangle ABC''$的位置.

(ⅰ)如果 C''没有落在 BC 上(图 16-7),作$\angle CAC''$的平分线 AD 交 BC 于 D,连结 $C''D$.由 $AC = AC''$,$\angle 1 = \angle 2$,$AD = AD$ 得$\triangle AC''D \cong \triangle ACD$,故 $C''D = CD$.但 $BD + C''D > BC''$,而 $BD + C''D = BD + DC = BC$,故 $BC > BC''$,即 $BC > B'C'$.

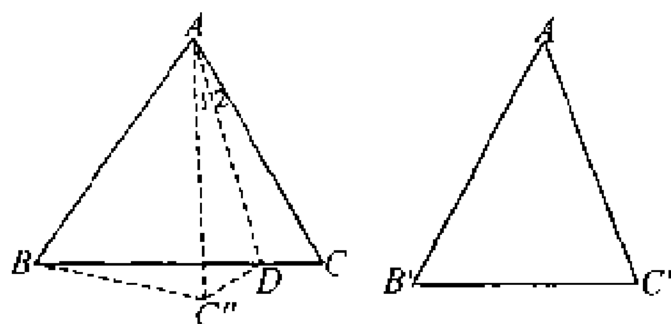


图 16-7

(ⅱ)如果 C''落在 BC 上(图 16-8),则 $BC = BC'' + C''C > BC'' = B'C'$.

综合(ⅰ),(ⅱ),都有 $BC > B'C'$.

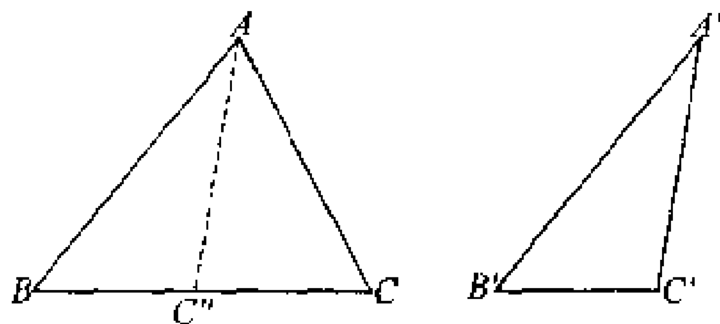


图 16-8

(2)如果$\angle A = \angle A'$,显然有$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,从而 $BC =$

$B'C'$，与题设条件矛盾；如果$\angle A < \angle A'$，由 $AB = A'B'$，$AC = A'C'$ 及(1)知 $BC < B'C'$，也与题设条件矛盾.

注 有了(1)作基础，(2)采取了反证法.

例 6 在锐角三角形 ABC 中，$AB > AC$，AM 为中线，P 为$\triangle AMC$ 内一点，证明：$PB > PC$.

证明 如图 16－9，在$\triangle AMB$ 和$\triangle AMC$ 中，AM 是公共边，$BM = MC$，$AB > AC$，则$\angle AMB > \angle AMC$，所以$\angle AMC < 90°$. 过点 P 作 $PH \perp BC$，垂足为 H，则 H 在线段 MC 上. $BH > BM = MC > HC$. 于是 $PB > PC$.

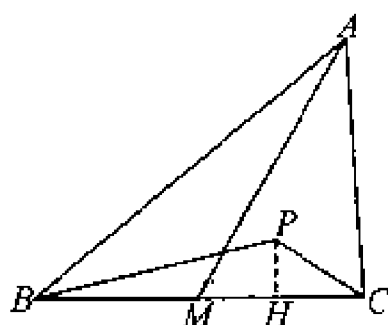


图 16－9

例 7 如图 16－10，在线段 BC 同侧作两个三角形$\triangle ABC$ 和$\triangle DBC$，使得 $AB = AC$，$DB > DC$，且 $AB + AC = DB + DC$. 若 AC 和 BD 相交于 E，求证：$AE > DE$.

证明 依题设，有

$2DB > DB + DC = AB + AC = 2AC$，

故 $DB > AC$.

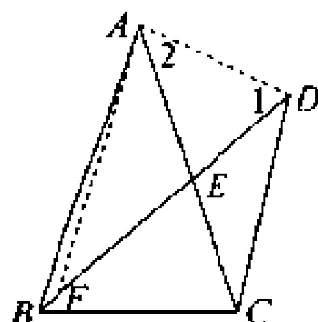


图 16－10

在 DB 上取点 F，使 $DF = AC$，则 $CD + BF = AB = AC$. 而$\triangle ABC$ 中，$AF + BF > AB$，所以 $AF > CD$.

在$\triangle ADC$ 与$\triangle ADF$ 中，AD 为公共边，$AC = DF$，$AF > CD$，故$\angle 1 > \angle 2$，进而可得 $AE > DE$.

例 8 求证：在三角形中，大边与它的高的和不小于小边与它的高的和.

已知：如图 16－11，$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，$BE \perp AC$ 于 E，$CF \perp AB$ 于 F，求证：$AB + CF \geqslant AC + BE$.

证明 设 $AB = c$，$AC = b$，$BE = h_b$，$CF = h_c$，则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

设$\frac{c}{b}=k$，则$\frac{h_b}{h_c}=k$，有 $c=bk, h_b=ch_c$.

当$\angle A\neq 90°$时，$AC>CF$，即 $b>h_c$，于是

$c-b=b(k-1)>h_c(k-1)=h_ck-h_c=$
h_b-h_c，

从而，有 $c+h_c>b+h_b$，即 $AB+CF>AC+BE$.

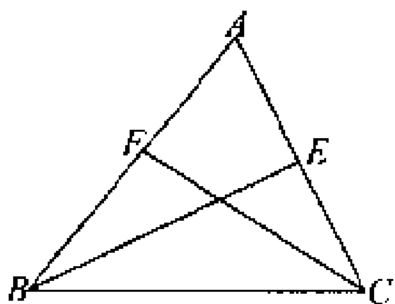


图 16－11

当$\angle A=90°$时，AC 与 CF 重合，AB 与 BE 重合，有 $AB+CF=AC+BE$.

综上所述，命题成立.

例 9 如图 16－12，D、E 是等腰$\triangle ABC$ 底边 BC 上的两个三等分点，求证：$\angle BAD<\angle DAE$.

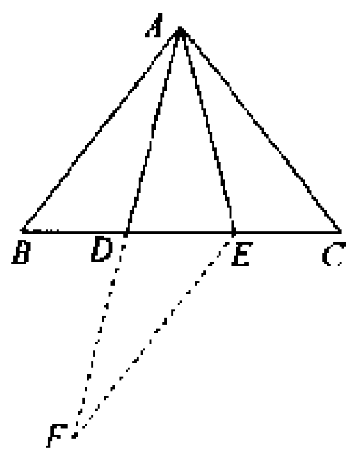


图 16－12

分析 因 $BD=DE$，故 AD 是$\triangle ABE$ 的中线，延长 AD 至 F，使 $DF=AD$，连 EF，则$\triangle DEF\cong\triangle DBA$，$\angle BAD$"移"至$\angle F$，只需证明 $EF>AE$.

因$\angle AEB>\angle C=\angle B$，故 $AB>AE$. 于是 $EF>AE$，有$\angle FAE>\angle F$，即$\angle BAD<\angle DAE$.

练 习 十 六

1. 设 D 为$\triangle ABC$ 内任意一点，求证：$AB+AC>DB+DC$.

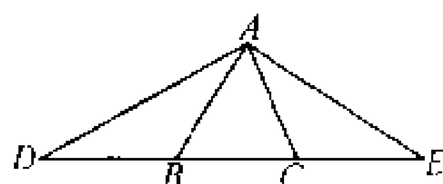
2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，D 为 BC 的中点. 求证：$\angle BAD<\angle CAD$.

3. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 是 BC 边上的中线，P 是 AD 上一点. 求证：$\angle PCB>\angle PBC$.

4. $\triangle ABC$ 中，CF 是 AB 边上的高，BE 是 AC 边的高，$AB>AC$，求证：$BE>CF$.

5. $\triangle ABC$ 中，AD 是$\angle A$ 的平分线，$AB>AC$. 求证：$BD>DC$.

6. 如图，$AB > AC$，延长 BC 到 E，使 $CE = CA$，延长 CB 到 D，使 $BD = AB$，求证：$AD > AE$.

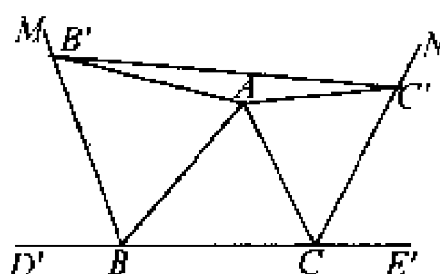


（第 6 题）

7. 求证：如果三角形一边上的中线小于这边的一半，那么这个三角形是钝角三角形.

8. $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，$\angle A > 90°$，AB、AC 的垂直平分线分别交 BC 边于 D、E 两点，求证：$AD > AE$.

9. 如图，已知 $\angle D'BA$ 和 $\angle E'CA$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，它们的角平分线分别为 BM、CN，B'、C' 分别为 BM 和 CN 上任意一点. 求证：$\triangle ABC$ 的周长 $<$ $\triangle AB'C'$ 的周长.



（第 9 题）

10. ABC 中，$BC > CA > AB$，AD 与 BE 为角平分线，交于点 I，求证：$IE > ID$.

第十七讲　平行四边形

知识点和方法述要

1. 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2. 平行四边形性质

(ⅰ)对角相等.

(ⅱ)对边相等.

推论　夹在两条平行线间的平行线段相等.

(ⅲ)对角线互相平分.

3. 两条平行线中,一条直线上任意一点到另一条直线的距离,叫做两条平行线的距离.

4. 平行四边形的判定

(ⅰ)两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

(ⅱ)两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

(ⅲ)对角线互相平分的四边形是平行四边形.

(ⅳ)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例题精讲

例 1　如图 17-1,过▱$ABCD$ 的四个顶点,分别向两条对角线作垂线,垂足为 E、H、G、F.求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明　设 AC、BD 交于 O. 依题设,$AO = OC$,$\angle AOE = \angle COG$,故 Rt$\triangle AOE \cong$ Rt$\triangle COG$,可得 $OE = OG$. 同理 $OF = OH$. 故四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

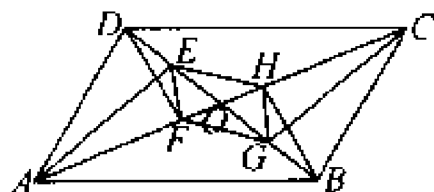


图 17-1

例 2　如图 17-2,在▱$ABCD$ 中,$AE \perp$

BC, $CF \perp AD$, $DN = BM$，求证：EF 与 MN 互相平分.

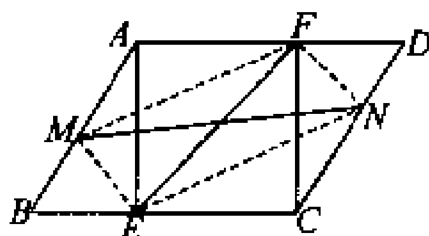


图 17－2

分析 只要证明四边形 $MENF$ 是平行四边形即可. 观察图形，题设条件为证明对边相等提供了较多便利.

在▱$ABCD$ 中，$AB = CD$, $\angle B = \angle D$，故 $Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle CDF$，有 $BE = DF$. 又 $BC = AD$，故 $CE = AF$. 因 $BM = DN$，所以 $AM = CN$, $\triangle MBE \cong \triangle NDF$，有 $ME = NF$, $\triangle AMF \cong \triangle CNE$. 进而有 $EN = FM$，所以四边形 $ENFM$ 为平行四边形. EF、MN 互相平分.

例 3 如图 17－3，在▱$ABCD$ 的两边 CD、CB 的外侧分别作等边 $\triangle CBE$ 和等边 $\triangle CDF$，求证：$\triangle AEF$ 是等边三角形.

分析 根据对称性，若 $EA = EF$ 获证，则同理可证得 $FA = FE$. 欲证 $EA = EF$，可通过证明 $\triangle EAB \cong \triangle EFC$ 得到. 依题设，关键在于证明 $\angle ABE = \angle FCE$.

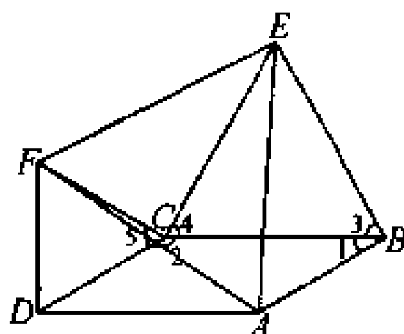


图 17－3

因四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$，又 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CEB$ 都是等边三角形，故 $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 60°$，于是

$$\angle ABE = \angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + 60°$$

$$\begin{aligned}\angle FCE &= 360° - \angle 4 - \angle 5 - \angle 2 \\ &= 360° - 60° - 60° - (180° - \angle 2) \\ &= \angle 1 + 60°,\end{aligned}$$

故 $\angle ABE = \angle FCE$. 又 $AB = CD = CF$, $BE = CE$，所以 $\triangle ABE \cong \triangle FCE$，于是 $AE = EF$. 同理 $AF = EF$. 故 $\triangle AEF$ 是等边三角形.

例 4 如图 17－4 所示，▱$ABCD$ 中，$DE \perp AB$ 于 E, $BM = MC = DC$. 求证：$\angle EMC = 3\angle BEM$.

分析 因 $\angle EMC$ 是 $\triangle BEM$ 的外角，有 $\angle EMC = \angle B + \angle BEM$,

因此，只需证明$\angle B=2\angle BEM$. 但难以直接利用$\triangle BME$. 注意到题设条件，添加辅助线：延长EM，交DC延长线于F. 这样做，$\angle MCF=\angle B$，$\angle F=\angle BEM$. 于是问题转化为证明$\angle FCM=2\angle F$.

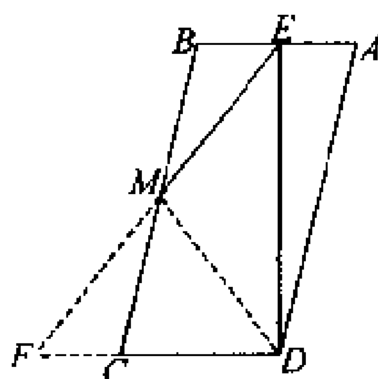


图 17-4

因$AB \parallel CD$，所以$\angle F=\angle BEM$. 又因$DE \perp AB$，故$DE \perp DF$. 因M为BC中点，$BM=MC$，故$\triangle BME \cong \triangle CMF$，可得$ME=MF$，所以$\angle F=\angle FDM$，又$MC=CD$，所以$\angle CDM=\angle CMD$. 于是

$$\angle MCF=\angle CDM+\angle CMD=2\angle FDM=2\angle F,$$

从而，有

$$\angle EMC=\angle F+\angle MCF=3\angle F=3\angle BEM.$$

例 5 如图 17-5，$\triangle ABC$为等边三角形，D、F分别为CD、BA上的点，且$CD=BF$，以AD为边作等边$\triangle ADE$. 求证：四边形$CDEF$为平行四边形.

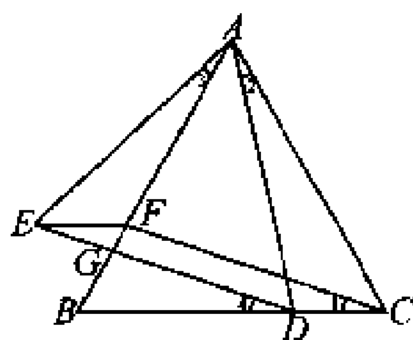


图 17-5

分析 容易看到$\triangle ADC \cong \triangle CFB$，利用等边三角形$AED$，可得$CF=DE$. 若能证明$CF \parallel DE$，命题即可获证. 为此，可从证明$\angle 1=\angle 4$着手.

因$\angle 3+\angle BAD=\angle 2+\angle BAD=60^\circ$，所以$\angle 3=\angle 2$. 进而$\angle 3=\angle 1$. 在$\triangle AEG$与$\triangle DGB$中，$\angle AEG=\angle B=60^\circ$，$\angle AGE=\angle BGD$，故$\angle 4=\angle 3$. 所以$\angle 1=\angle 4$，$CF \parallel DE$. 又$CF=DE$，所以四边形$CDEF$为平行四边形.

例 6 如图 17-6，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD \perp AB$，D为垂足，$\angle ABC$的平分线BE交CD于G，交AC于E，$GF \parallel AB$，交AC于F. 求证：$AF=CG$.

分析 注意到$GF \parallel AB$，作$GH \parallel AC$，可得平行四边形$AHGF$，进

而有 $GH = AF$. 欲证 $AF = CG$,即证 $GH = CG$. 若能证明$\triangle BGC \cong \triangle BGH$,问题便可得以解决.

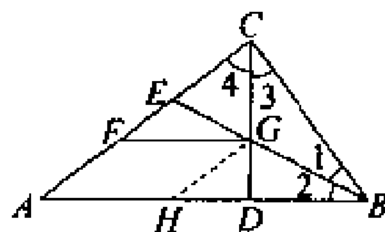


图 17-6

在 $Rt\triangle ACB$ 中,$\angle C = 90°$,$CD \perp AB$,故$\angle A + \angle ABC = \angle 3 + \angle ABC$,可得$\angle A = \angle 3$. 所以$\angle 3 = \angle GHD$. 又$\angle 1 = \angle 2$, BG 公共,故$\triangle BGC \cong \triangle BGH$,可得 $CG = GH$. 所以 $AF = CG$.

例 7 如图 17-7,▱$ABCD$ 内,AR、BR、CP、DP 分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的平分线. 求证: $SQ = AB - BC$.

证明 延长 AR、CP 分别交 CD、AB 于 L、K. 依题设,$\angle 1 = \angle 2$,$\angle 3 = \angle 4$. 因 $AB // CD$,所以

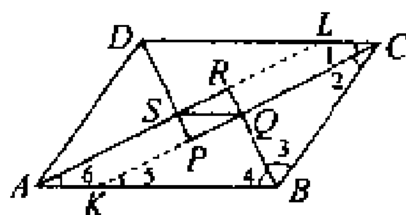


图 17-7

$$\angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle DCB + \angle ABC)$$
$$= \frac{1}{2} \times 180° = 90°,$$

即$\angle BQC = 90°$. 又 BQ 公共,所以 $Rt\triangle BQC \cong Rt\triangle BQK$,可得 $CQ = QK$, $BC = BK$.

同理 $AS = LS$.

因$\angle 5 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle A = \angle 6$,所以 $AL // KC$,又 $AK // LC$,故四边形 $AKCL$ 是平行四边形,$KC = AL$. 于是 $AS \mathrel{\underline{\underline{//}}} KQ$,四边形 $AKQS$ 为平行四边形,可知

$$SQ = AK = AB - BK = AB - BC.$$

例 8 如图 17-8,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,以 AC 为边在两侧各作一个正三角形 ACP 和正三角形 ACQ. 求证: $\angle BPD = \angle DQB$.

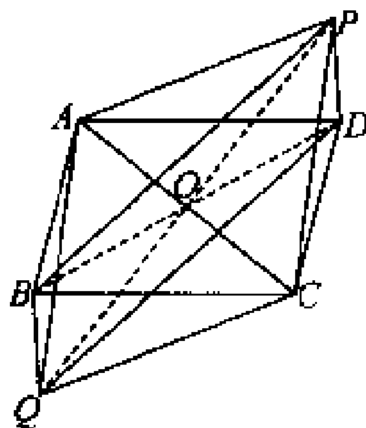


图 17-8

分析 若能证明四边形 $BQDP$ 是平行四边形,即可得到$\angle BPD = \angle DQB$. 因▱$ABCD$ 的对角线 BD、AC 平分于 AC 中点 O,根据平行四边

形判定定理,只需证明 PQ 的中点也为 O,问题即可解决.

连接 BD,设与 AC 交于 O. 因四边形 $ABCD$ 为平行四边形,故 AC、BD 相互平分于 O. 因 $AP=QC$,$AQ=CP$,故四边形 $AQCP$ 是平行四边形. 连接 PQ,则 PQ 与 AC 相互平分于点 O. 在四边形 $BQDP$ 中,$OB=OD$,$OP=OQ$,所以四边形 $BQDP$ 是平行四边形,$\angle BPD=\angle DQB$.

例 9 如图 17-9,▱$ABCD$ 中,M、N 分别是 AD、AB 上的点,且 $BM=ND$,其交点为 P,求证:$\angle CPB=\angle CPD$.

证明 连结 MC,NC,则 $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}S_{▱ABCD}$,$S_{\triangle NCD}=\frac{1}{2}S_{▱ABCD}$,所以 $S_{\triangle MBC}=S_{\triangle NCD}$. 作 $CE\perp BM$,$CF\perp ND$,E、F 为垂足,则 $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}MB\cdot CE$,$S_{\triangle CND}=\frac{1}{2}ND\cdot CF$. 因 $BM=ND$,所以 $CE=CF$. 故点 C 在$\angle BPD$ 的平分线上,有$\angle CPB=\angle CPD$.

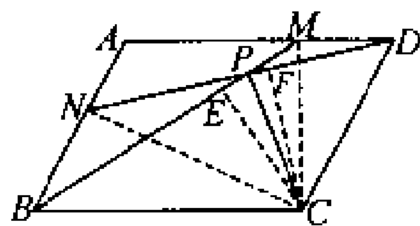
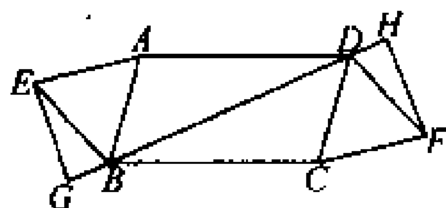


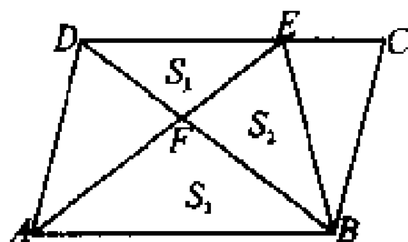
图 17-9

练 习 十 七

1. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 是等边三角形,且 $EG\perp BD$,$FH\perp BD$,G、H 分别是垂足. 求证:$EG=FH$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在▱$ABCD$ 中,E 为 CD 上一点,且 $DE:EC=5:3$,连结 AE、BE、BD,AE、BD 交于 F,设$\triangle DEF$、$\triangle BEF$、$\triangle ABF$ 的面积分别

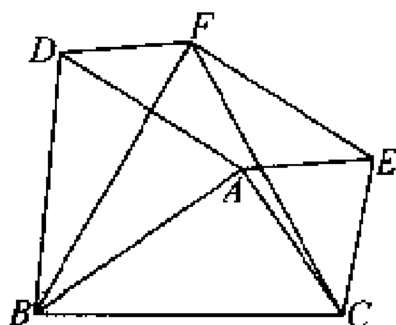
为 S_1、S_2、S_3，求 $S_1:S_2:S_3$.

3. 若平行四边形 $PQRS$ 的各顶点在另一个平行四边形 $ABCD$ 的各边上，试证：这两个平行四边形的对角线过同一点.

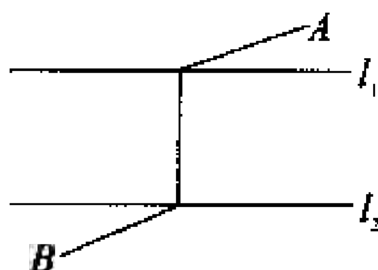
4. E 为▱$ABCD$ 中 BC 边的中点，AE 交 BD 于 G，$S_{\triangle BEG}=1$，求 $S_{▱ABCD}$.

5. 如图，以△ABC 的二边 AB、AC 为边向形外分别作等边△ABD 和等边△ACE，又以 D、A、E 为顶点作平行四边形 $AEFD$. 求证：△BCF 是等边三角形.

6. 已知线段 AB、CD 相交于 O，且 $AB=2$，$CD=1$，$\angle AOC=60°$. 试证：$AC+BD\geqslant\sqrt{3}$.



（第 5 题）



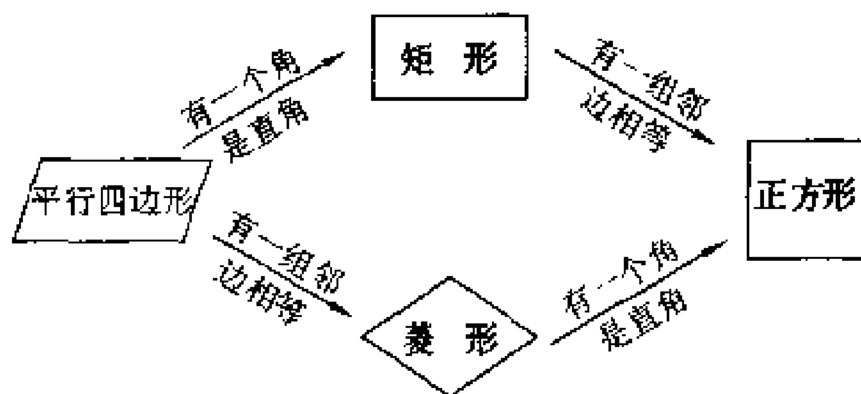
（第 7 题）

7. 如图，A 地和 B 地位于一条小河的两侧，河岸 l_1、l_2 彼此平行，要架一条与河岸垂直的桥，桥址应如何选择，才能使 A 到 B 的路程最短.

第十八讲 矩形、菱形、正方形

知识点和方法述要

1.矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形.彼此间关系如下图所示:



2.(1)矩形的性质:

(ⅰ)四个角都是直角;

(ⅱ)对角线相等.

(2)矩形的判定:

(ⅰ)有三个角是直角的四边形是矩形;

(ⅱ)对角线相等的平行四边形是矩形.

3.(1)菱形的性质:

(ⅰ)菱形的四条边都相等;

(ⅱ)菱形的对角线互相垂直,并且每一条对角线平分一组对角.

(2)菱形的判定:

(ⅰ)四边都相等的四边形是菱形;

(ⅱ)对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

4.有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

正方形的性质:

(ⅰ)正方形的四个角都是直角,四条边都相等;

(ⅱ)正方形的两条对角线相等并且互相垂直平分,每条对角线平分一组对角.

例 题 精 讲

例1 如图18-1,在矩形$ABCD$中,O是对角线AC的中点,过O作AC的垂线,分别交BC、AD于E、F.若$AB=2\text{cm}$,$BC=4\text{cm}$,求四边形$AECF$的面积.

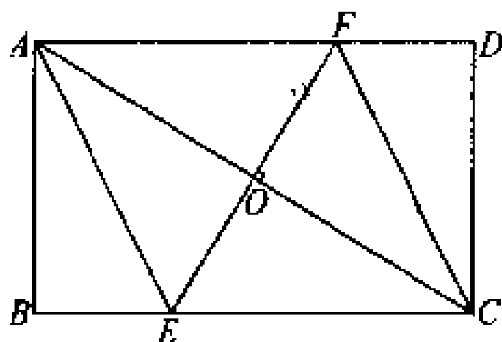


图18-1

解 因O是AC中点,$EF\perp AC$,故EF为AC的垂直平分线,$AE=EC$.设$BE=x\text{cm}$,则$CE=AE=(4-x)\text{cm}$.根据勾股定理,有$AE^2=AB^2+BE^2$,即

$$(4-x)^2=x^2+4.$$

解得$x=\frac{3}{2}$.于是$EC=\frac{5}{2}(\text{cm})$.

因$AO=OC$,$\angle FOA=\angle EOC$,故$\text{Rt}\triangle FOA\cong\text{Rt}\triangle EOC$.可得$AF=CE$.又$AF\parallel CE$,故四边形$AECF$为平行四边形.

$$S_{\square AECF}=EC\cdot AB=\frac{5}{2}\times2=5(\text{cm}^2).$$

即为所求.

例2 如图18-2所示,矩形$ABCD$中,$CE\perp BD$于E,AF平分$\angle BAD$,交EC延长线于F,求证:$CA=CF$.

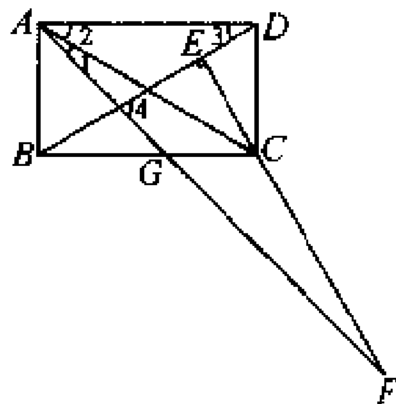


图18-2

分析 只需证明$\angle1=\angle F$.注意到AF平分$\angle BAD$,有$\angle1=45^\circ-\angle2$,故又只需证明$\angle F=45^\circ-\angle2$.

因$CE\perp DB$,故$\angle BEF=90^\circ$,$\angle F=90^\circ-$

$\angle 4$,又 AF 平分$\angle BAD$,故$\angle FAD=45^\circ$,$\angle 4=\angle FAD+\angle 3=45^\circ+\angle 3$.所以$\angle F=90^\circ-(45^\circ+\angle 3)=45^\circ-\angle 3$.因$\angle 1=45^\circ-\angle 2$且$\angle 2=\angle 3$,所以$\angle 1=\angle F$.于是 $CA=CF$.

例 3 如图 18-3,正方形 $ABCD$ 中,直线 $AM\perp AC$,A 是垂足,在 AM 上取点 E,使 E 与 D 在 AC 的同侧,且使 $BE=BD$,BE 交 AD 于 F.求证:$DE=DF$.

证明 依题设,$AC\perp BD$,$AM\perp AC$,故 $AM/\!/BD$.过 E 作 $EG\perp BD$,G 为垂足,则 $AO=EG$.又 $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$,故 $EG=\frac{1}{2}BD$.因 $BE=BD$,所以 $EG=\frac{1}{2}BE$.进而可知$\angle DBE=30^\circ$,$\angle DEB=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$.

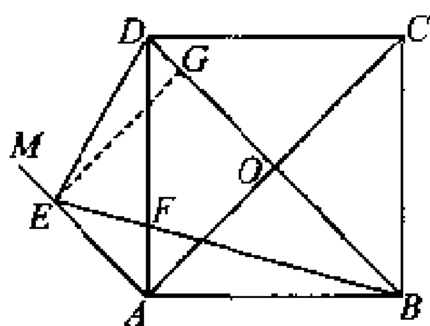


图 18-3

又$\angle DFE=\angle FDB+\angle FBD=45^\circ+30^\circ=75^\circ$,所以$\angle DEB=\angle DFE$,即得 $DE=DF$.

例 4 如图 18-4,正方形 $ABCD$ 中,$EF/\!/AC$,$AG=AD$,连结 GE,并延长交 DF 于 M.求证:$\angle AMG=\angle G$.

分析 只需证明 $AG=AM$.注意到 AM 是$\triangle GMD$ 的中线,若能证明$\angle GMD=90^\circ$,问题即可得以解决.

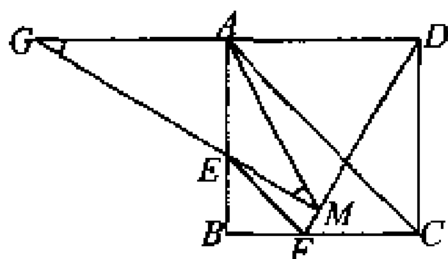


图 18-4

在正方形 $ABCD$ 中,因 $EF/\!/AC$,故$\angle BFE=\angle BEF=45^\circ$,可知 $BE=BF$,进而有 $AE=CF$.又 $AG=CD$,故 Rt$\triangle DCF\cong$Rt$\triangle GAE$,有$\angle G=\angle FDC$.所以$\angle G+\angle GDM=\angle FDC+\angle GDM=90^\circ$.于是$\angle GMD=90^\circ$.因 $AG=AD$,所以 $AM=AG$.

例 5 如图 18-5,$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90^\circ$,$AD\perp BC$,D 为垂足.在 BC 上取 $BE=BA$,作 $EF\perp BC$ 交 AC 于 F,连结 BF 交 AD 于 G.求证:四边形 $AGEF$ 为菱形.

证明 因$\angle BAC=\angle BEF=90^\circ$,$BE=BA$,$BF$ 公共,故 Rt$\triangle BFA$

≌Rt△BFE.可得 $AF=FE$,∠3=∠4.因 $AD\perp BC$,$EF\perp BC$,故 $AD/\!/EF$,∠4=∠5,所以∠3=∠5,$AF=AG$.故 $AG\underline{\underline{/\!/}}EF$,四边形 $AGEF$ 为平行四边形,有 $GE\doteq AF$.所以 $AG=GE=EF=FA$,即四边形 $AGEF$ 是菱形.

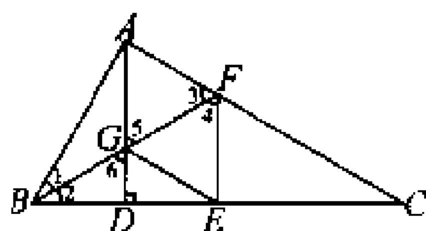


图 18-5

例6 已知 18-6,四边形 $ABCD$ 中,∠ABC=∠ADC=90°,M 是 AC 的中点,$MN\perp BD$ 且与 MD 的平行线 BN 相交于 N.

(1)求证:四边形 $BNDM$ 是菱形.

(2)若∠BAC=30°,∠ACD=45°,求菱形 $BNDM$ 相邻两角的度数.

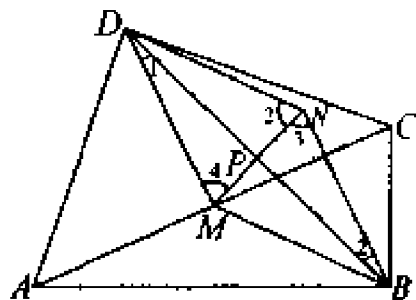


图 18-6

证明 (1)因∠ABC=90°,M 为 AC 的中点,故 $BM=\frac{1}{2}AC$.同理 $DM=\frac{1}{2}AC$.所以 $BM=DM$,因 $MN\perp BD$,所以 MN 为线段 BD 的垂直平分线,可知 $DN=BN$,∠2=∠3.又 $BN/\!/DM$,有∠4=∠3=∠2,故 $DM=DN$.于是 $DM=MB=BN=ND$,四边形 $BNDM$ 为菱形.

(2)在 Rt△ADC 中,∠ACD=45°,则△ACD 为等腰直角三角形,$DM\perp AC$,∠DMC=90°.在△ABM 中,$AM=BM$,可得∠BMC=2∠BAC=60°,所以∠DMB=150°.于是∠MBN=30°.

例7 如图 18-7,正方形 $ABCD$ 中,P 为 BC 上一点,AQ 平分∠PAD.求证:$AP=BP+DQ$.

证一 在 PA 上截取 $PE=BP$,连结并延长交 AQ 于 M,交 AD 于 F,则∠PBE=∠PEB=∠AEF.因 $AD/\!/BC$,故∠PBE=∠BFA.于是∠AEF=∠BFA,可知 $AE=AF$.又∠1=∠2,所以 $AM\perp EF$.在 Rt△BAF 中,∠ABF+∠AFB=∠1+∠AFB,故∠ABF=∠1.又 $AB=AD$,∠BAF=∠D=90°,所以 Rt△BAF≌Rt

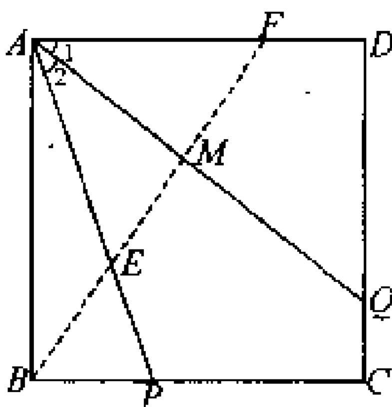


图 18-7

$\triangle ADQ$,有 $AF = DQ$.于是 $AP = BP + DQ$.

证二　如图 18－8,延长 CB 到 G,使 $BG = DQ$.在$\triangle ADQ$ 与$\triangle ABG$ 中,$\angle D = \angle ABG = 90°$, $AD = AB$, $DQ = BG$, 故 $\triangle ADQ \cong \triangle ABG$,$\angle 1 = \angle 3$,$\angle DQA = \angle G$. 因$\angle 1 = \angle 2$,所以$\angle 2 = \angle 3$.进而有$\angle PAG = \angle BAQ$.因 $AB \parallel CD$,所以 $\angle BAQ = \angle DQA$. 于是 $\angle PAG = \angle G$,可得 $PA = PG$.从而有

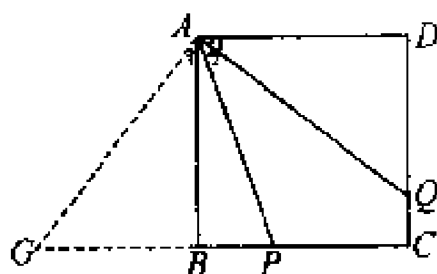


图 18－8

$$AP = PG = BP + BG = BP + DQ.$$

例 8　已知:如图 18－9,过正方形 $ABCD$ 的对角线上一点 P 作 $PE \perp BC$,垂足为 E.作 $PF \perp CD$,垂足为 F.求证:$AP = EF$,$AP \perp EF$.

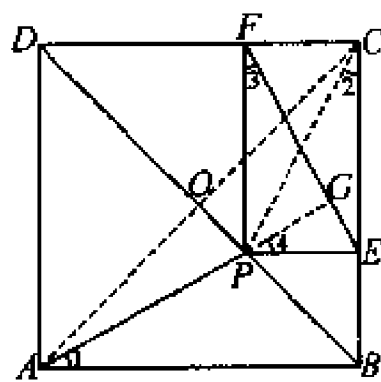


图 18－9

分析　易见四边形 $PECF$ 为矩形,可将对角线 EF 转移到PC 位置. 利用 BD 是AC 的垂直平分线.即可证得 $AP = EF$.欲证 $AP \perp EF$,可延长 AP 交 EF 于 G,转而证明$\angle GPE + \angle PEG = 90°$.

因 $PE \perp BC$,$AB \perp BC$,所以 $AB \parallel PE$,有$\angle 4 = \angle 1$.因 $AB = BC$,$AP = PC$,BP 公共,所以$\triangle PBA \cong \triangle PBC$. 可得$\angle 2 = \angle 1$. 又在矩形中$\angle 2 = \angle 3$,于是$\angle 3 = \angle 4$,所以$\angle 4 + \angle PEF = \angle 3 + \angle PEF = 90°$,有 $PG \perp EF$,即 $AP \perp EF$.

例 9　已知:E 为正方形 $ABCD$ 内一点,$\angle ECD = \angle EDC = 15°$,求证:$\triangle ABE$ 为等边三角形.

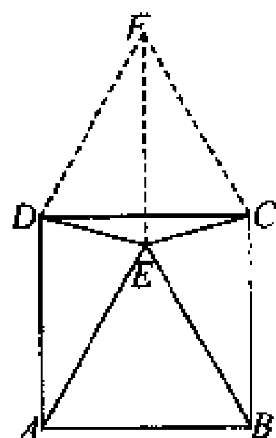


图 18－10

证一　如图 18－10,以 CD 为一边向形外作等边三角形 DFC,连接 EF,则$\angle FDE = \angle EDA = 75°$,$DE = DE$, $DA = DF$,故$\triangle FDE \cong \triangle ADE$,可得 $EF = AE$,又 EF 为 CD 的垂直平分线,$\angle DEF = 90° - 15° = 75°$,从而有$\angle FDE = \angle FED$,所以 $EF = DF = DA$,

于是 $AE=EF=DA$.同时 $BE=EF=BC$.由 $AD=BC=AB$ 可得 $AB=AE=BE$.$\triangle ABC$ 为等边三角形．

证二 如图 18－11 以 AB 为一边在正方形 $ABCD$ 内作等边$\triangle ABE'$，则 $AE'=BE'=AB$，$\angle E'AD=\angle E'BC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，又 $AD=BC$，所以$\triangle E'AD\cong\triangle E'BC$，有 $DE'=CE'$．因 $AD=AE'$，所以$\angle ADE'=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$，$\angle E'DC=15^\circ$．这表明 DE' 与 DE 重合．同理 CE' 与 CE 重合．故 E' 与 E 重合，$\triangle ABE$ 即等边三角形 ABE'．

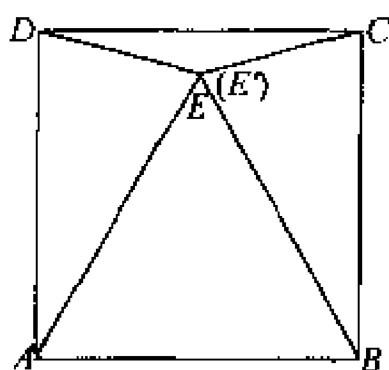


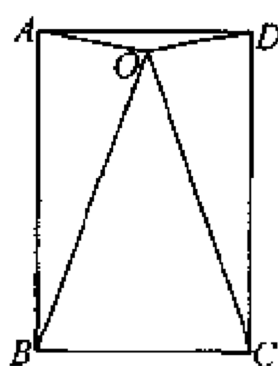
图 18－11

注 证二采用了同一法，同一法是一种间接证法．一般步骤是先根据要求证的结论作出一图形，再通过推理，证明作出的图形与按题设条件所作的图形同一，从而推得结论成立．

练 习 十 八

1. 四边形 $ABCD$ 是菱形，AC、BD 是对角线，$\angle ABC=30^\circ$，求证 $AB^2=AC\cdot BD$.

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ODA=\angle OAD=\frac{1}{4}\angle BOC$，求证：$BO=OC=AB$.



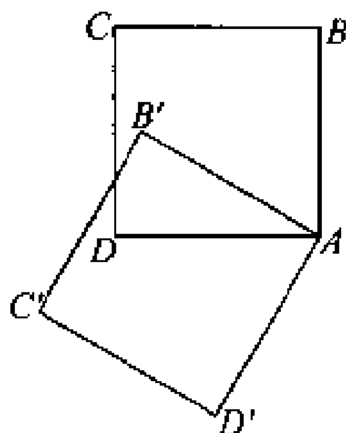
（第 2 题）

3. 已知等腰直角$\triangle ABC$ 中，D 是斜边 AB 的中点，Q 是 AD 上一点，P 是 DB 上一点，$QE\perp AC$ 于 E，$QF\perp CB$ 于 F，$PH\perp AC$ 于 H，$PG\perp CB$ 于 G．求证：$\angle EDH=\angle FDG$.

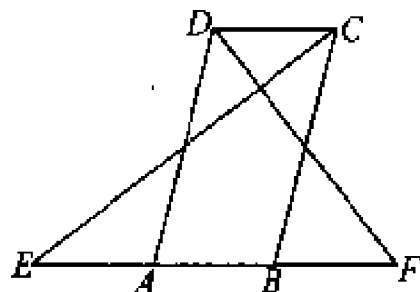
4. 设 G 是正方形 $ABCD$ 的边 DC 上一点，连结 AG 并延长交 BC 延长线于 K，求证：$\frac{1}{2}(AG+AK)>AC$.

5. 如图，将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕 A 点按逆时针方向旋转

$60°$至$AB'C'D'$的位置，求这两个正方形重叠部分的面积.



(第5题)



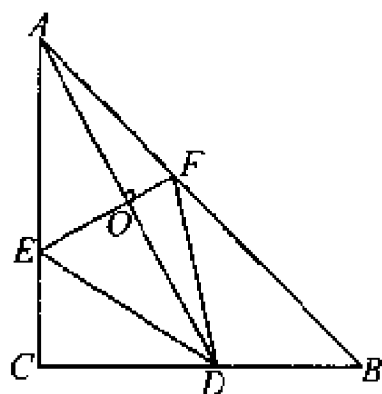
(第6题)

6. 如图，在▱$ABCD$中，$AD=2AB$，延长AB到F，使$BF=AB$，延长BA到E，使$EA=AB$，连结CE和DF. 求证：$CE\perp DF$.

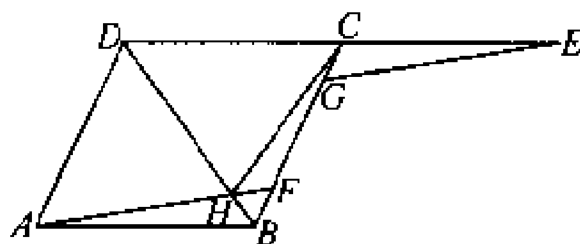
7. 如图，D为等腰直角$\triangle ABC$边BC上一点，AD的垂直平分线EF分别交AC、AD、AB于E、O、F，$BC=2$.

(1)当$CD=\sqrt{2}$时，求AE.

(2)证明：当$CD=2\sqrt{2}-2$时，四边形$AEDF$是菱形.



(第7题)



(第8题)

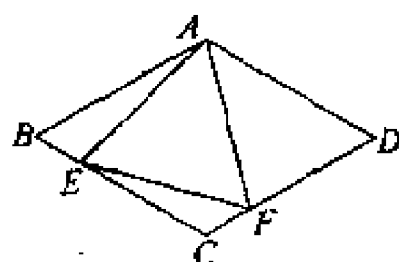
8. 延长菱形一边DC至E，使$CE=DC$，F、G在BC上，且$BF=CG$，又$\angle FAB=\dfrac{1}{4}\angle DAB$，$AF$交对角线$BD$于$H$，求证：$\angle FHC=2\angle CEG$.

9. 已知M是正方形$ABCD$的BC边上的任意一点，$MN\perp AM$，交$\angle BCD$的外角平分线于N，求证：$AM=MN$.

10. 在正方形$ABCD$内任取一点E，连结AE、BE. 在$\triangle ABE$外分

别以 AE、BE 为边作正方形 $AEMN$ 和 $BFGE$，连结 NC、AF，求证：$NC \parallel AF$.

11. 如图，菱形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 BC、CD 上的点，$\angle BAE = 15°$，$\angle B = \angle EAF = 60°$，求 $\angle CEF$ 的度数.



(第 11 题)

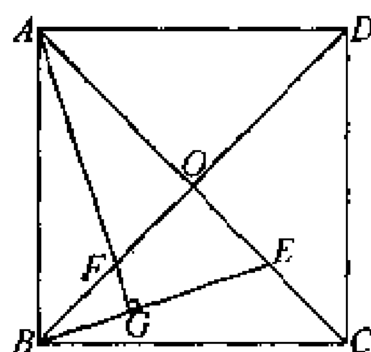
12. 以 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边分别向形外作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$，过 A 点作直线分别交 BC、FH 于 D、M，试证：

(1)若 $AD \perp BC$，则 AD 平分 FH；

(2)若 AD 平分 BC，则 $AD \perp FH$.

13. (1)如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 O，E 是 AC 上一点，$AG \perp BE$，垂足 G，AG 交 BD 于 F，求证：$OE = OF$.

(2)对于(1)，若 E 在 AC 延长线上，G、F 分别为 EB、DB 延长线上点，其他条件不变，则(1)中结论还成立吗？说明理由.



(第 13 题)

第十九讲　梯　形

知识点和方法述要

1.(1)一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形,平行的两边叫做梯形的底,不平行的两边叫做梯形的腰,两底的距离叫做梯形的高.

(2)一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形.

(3)(ⅰ)两腰相等的梯形叫做等腰梯形.

(ⅱ)等腰梯形的性质:

(a)等腰梯形在同一底上的两个角相等;

(b)等腰梯形的两条对角线相等.

(ⅲ)等腰梯形的判定:

(a)在同一底上的两个相等的梯形是等腰梯形;

(b)对角线相等的梯形是等腰梯形.

2.平行线等分线段定理　如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等.

推论1　经过梯形一腰的中点与底平行的直线,必平分另一腰.

推论2　经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边.

3.(1)连结梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线.

(2)梯形中位线定理　梯形的中位线平行于两底,并且等于两底的一半.

4.梯形问题常通过添加辅助线转化为平行四边形或三角形的问题予以解决.常用辅助线如图19-1所示.

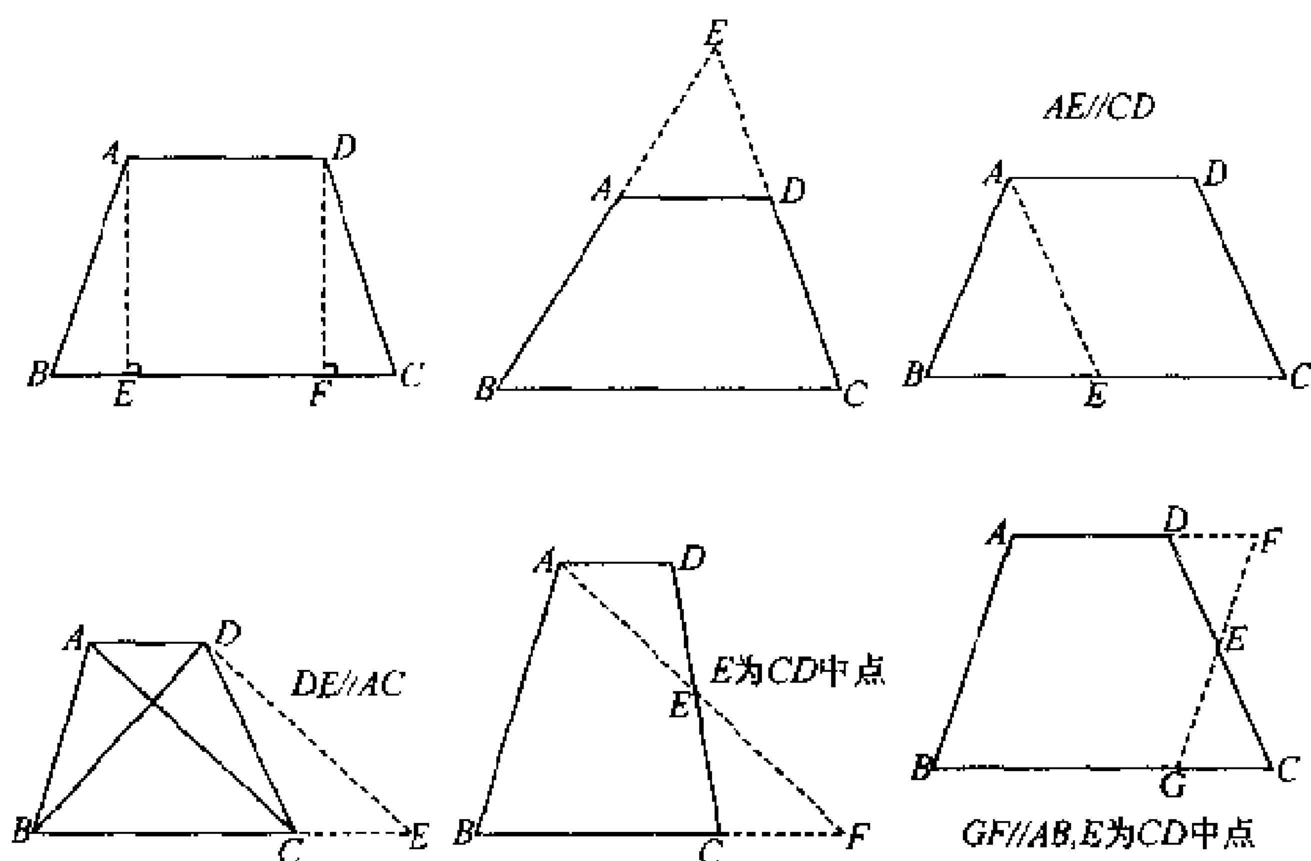


图 19－1

例 题 精 讲

例 1 如图 19－2,在梯形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$\angle B+\angle C=90°$,M、N 分别是 AD、BC 的中点,求证:$MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

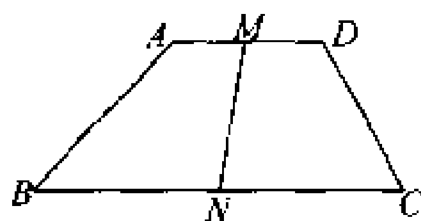


图 19－2

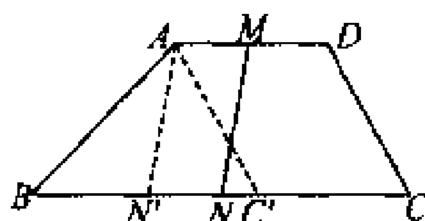


图 19－3

证一 如图 19－3,过 A 作 $AC' /\!/ DC$,交 BC 于 C',作 $AN' /\!/ MN$,交 BC 于 N'. 因 $AD /\!/ BC$,故四边形 $AC'CD$ 和 $AN'NM$ 都是平行四边形,有 $CC'=AD$,$NN'=MA$,$\angle AC'A=\angle C$. 因 $\angle B+\angle C=90°$,故 $\angle B+\angle BC'A=90°$.

$$BN' = NB - N'N = BN - AM = \frac{1}{2}(BC - AD),$$

$$BC' = BC - C'C = BC - AD.$$

故 N' 为 BC' 的中点，于是 $AN' = \frac{1}{2}BC'$，即 $MN = \frac{1}{2}(BC - AD)$.

证二 如图 19－4，过 N 作 $NH \parallel CD$，$NG \parallel AB$，交 BC 于 H、G. 因 $AD \parallel BC$，故四边形 $NHCD$ 与四边形 $NGBA$ 均为平行四边形，$\angle B = \angle NGH$，$\angle C = \angle NHM$. 因 $\angle B + \angle C = 90°$，所以 $\angle NGH + \angle NHG = 90°$，即 $\angle GNH = 90°$. 又 $MG = BM - BG = BM - AN$，$MH = MC - HC = MC - ND$，故 M 为 GH 中点，于是 $MN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}(CB - AD)$.

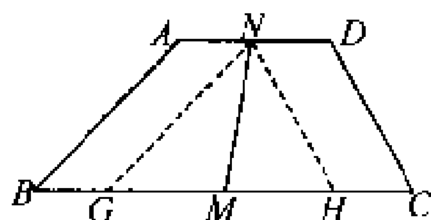


图 19－4

证三 如图 19－5，延长 BA、CD 交于 E. 连结 EM、EN，因 $AD \parallel BC$，故 $\angle ADE = \angle C$. 又 $\angle B + \angle C = 90°$，且 $AM = MD$，有 $\angle DEM = \angle EDM$，同理 $\angle C = \angle CEN$，故 M 在 EN 上. 于是

$$MN = EN - EM = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(BC - AD).$$

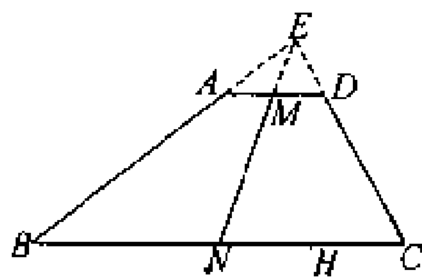


图 19－5

例 2 如图 19－6，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，M 是腰 BC 的中点，$MN \perp AD$，垂足为 N. 求证：梯形 $ABCD$ 的面积等于 $MN \cdot AD$.

证一 如图 19－6，过 M 作 $EF \parallel AD$，EF 交 DC 延长线于 E，交 AB 于 F. 因 $AB \parallel DC$，故 $\angle 1 = \angle E$，又 $\angle 2 = \angle 3$，$MC = MB$，故有 $\triangle MCE \cong \triangle MBF$. 于是

$$S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\square AFED} = MN \cdot AD.$$

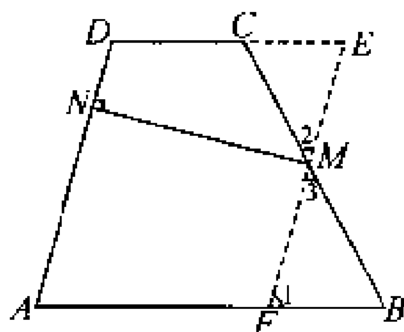


图 19－6

证二 如图 19－7，连结 DM，并延长交 AB 于 G.

因 $DC \parallel AB$，故$\angle 1 = \angle G$，又$\angle 2 = \angle 3$，$MC = MB$，于是$\triangle MCD \cong \triangle MBG$，故 $DM = MG$. 连结 AM，则有 $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle AMG}$，故

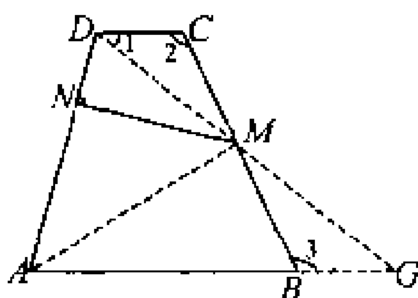


图 19－7

$$S_{\triangle ADG} = 2S_{\triangle ADM}$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} MN \cdot AD$$
$$= AM \cdot AD$$

有 $S_{梯形ABCD} = S_{\triangle ADG} = MN \cdot AD$.

例 3 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD < BC$，$AB = AC$ 且 $AB \perp AC$，$BD = BC$，AC、BD 交于 O，求$\angle BCD$ 的度数.

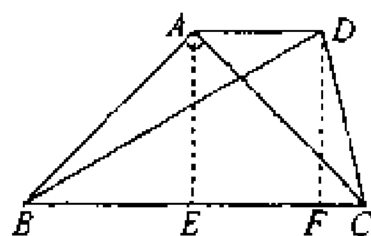


图 19－8

分析 如图 19－8，考虑$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 45° + \angle ACD$，但下一步计算$\angle ACD$ 难以下手．注意到 $BC = BD$，欲求$\angle BCD$ 可转而先求$\angle CBD$.

过 A、D 作 BC 垂线，垂足 E、F，因 $AD \parallel BC$，故 $DF = AE$. 由于$\triangle BAC$ 为等腰直角三角形，所以 E 为 AC 中点，$AE = \frac{1}{2}BD$，即 $DF = \frac{1}{2}BD$，有$\angle DBF = 30°$. 进而可得$\angle BCD = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$.

例 4 如图 19－9，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle C = 90°$，$AD \parallel BC$，$AD + BC = AB$，E 是 CD 的中点，且 $AD = 2$，$BC = 8$. 求$\triangle ABE$ 的面积.

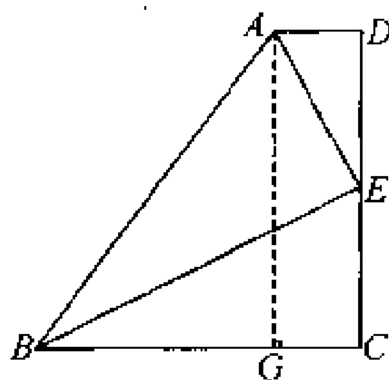


图 19－9

解 作 $AG \perp BC$ 于 G. 因$\angle C = 90°$，$AD \parallel BC$，故 $AG \mathrel{\underline{\parallel}} CD$. $BG = BC - AD$，由 $AD = 2$，$BC = 8$，可得 $BG = 6$，且 $BC = AD + BC = 10$. 根据勾股定理，得 $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = 8$，于是

$$S_{\triangle ABE} = S_{梯形ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BCE}$$

$$=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot CD-\frac{1}{2}AD\cdot DE-\frac{1}{2}BC\cdot CE$$
$$=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot CD-\frac{1}{4}CD\cdot AD-\frac{1}{4}CD\cdot BC$$
$$=\frac{1}{4}(AD+BC)\cdot CD$$
$$=\frac{1}{4}\times(2+8)\times 8$$
$$=20.$$

例 5 如图 19－10，四边形 $ABCF$ 中，$AB /\!/ DF$，AD 平分$\angle BAC$，$AC=DF$，$FC<AD$.

(1)求证:四边形 $ADCF$ 是等腰梯形.

(2)若$\triangle ADC$ 的周长为 16，$AF=3$，$AC-FC=3$，求四边形 $ADCF$ 的周长.

解 (1)因 $AB /\!/ DF$，故$\angle 1=\angle 3$，又$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle 2=\angle 3$，有 $AE=DE$，又 $AC=DF$，故 $EF=EC$，$\angle DFC=\angle ACF$. 因$\angle AED=\angle FEC$，所以$\angle 3=\angle 4$，$AD /\!/ FC$，且进而可得$\triangle ADF\cong\triangle DAC$，有 $DC=AF$.

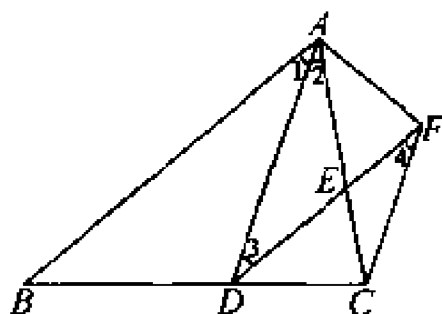


图 19－10

若 $AF /\!/ DC$，则四边形 $ADCF$ 为平行四边形，有 $AD=CF$，与 $FC<AD$ 矛盾. 所以 AF 与 DC 不平行.

综上所述，四边形 $ADCF$ 是等腰梯形.

(2)因$\triangle ADC$ 的周长为 16，$AF=3$，$FC=AC-3$，故

四边形 $ADCF$ 的周长 $=AD+DC+CF+AF$
$$=AD+DC+(AC-3)+AF$$
$$=(AD+DC+AC)-3+3$$
$$=\triangle ADC \text{ 的周长}=16.$$

例 6 如图 19－11，直角梯形 $ABCD$ 中，$DC /\!/ AB$，$\angle A$ 为直角，EF 是中位线，且 $CE\perp EB$，$EG\perp BC$，垂足为 G. 求证:

(1)$\triangle CDE \cong \triangle CGE$.

(2)当$\angle ABC = 60°$时,$AB^2 + AE^2 = 3EF^2$.

证明 (1)因 $CE \perp EB$,故$\triangle CEB$ 是直角三角形.又 F 是 BC 的中点,所以 $EF = CF = FB$,$\angle 1 = \angle 2$.又 EF 为中位线,故 $EF /\!/ AB$,有$\angle 1 = \angle 3$,进而得$\angle 2 = \angle 3$,BE 是$\angle ABC$ 的平分线,所以 $EA = EG$.又 $EA = ED$,于是 $EG = ED$,$\angle EGC = \angle EDC = 90°$.在 Rt$\triangle CDE$ 与 Rt$\triangle CGE$ 中,$EG = ED$,$EC = EC$,故 Rt$\triangle CDE \cong$ Rt$\triangle CGE$.

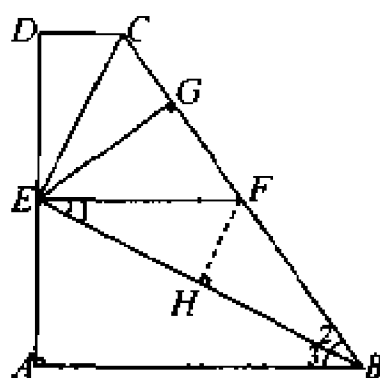


图 19-11

(2)由$\angle ABC = 60°$得$\angle 2 = 30°$,于是$\angle 1 = 30°$.作 $FH \perp BE$ 于 H,有 $HF = \frac{1}{2}EF$,$EH = HB = \frac{1}{2}EB$.根据勾股定理,可得 $HE^2 + HF^2 = EF^2$,即$(\frac{1}{2}BE)^2 + (\frac{1}{2}EF)^2 = EF^2$,从而有 $BE^2 = 3EF^2$.又在 Rt$\triangle EAB$ 中,$AB^2 + AE^2 = BE^2$,所以

$$AB^2 + AE^2 = 3EF^2.$$

例 7 如图 19-12,梯形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$AB = CD$,$AE = CF$,且 $AE \neq \frac{1}{2}AB$.求证:$2EF > AD + BC$.

分析一 作梯形中位线 QG.问题等价于证明 $EF > QG$,作 $FM \mathrel{\underline{/\!/}} GQ$,问题又转化为证明 $EF > FM$.

连结 QM,则四边形 $QMFG$ 为平行四边形.

因 $AB = CD$,故 $AQ = GC$,又 $AE = CF$,所以 $EQ = FG = QM$.又 $QG /\!/ BC$,所以$\angle EQG = \angle B = \angle C = \angle QGD = \angle MQG$.于是 $EM \perp QG$,进而有 $EM \perp MF$.

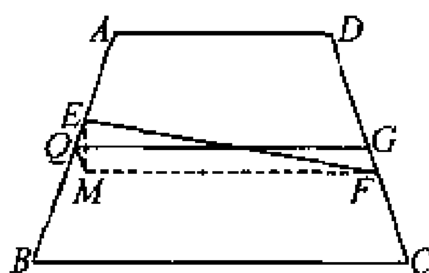


图 19-12

在 Rt△EMF 中，EF 为斜边，有 $EF > MF$，即 $EF > QG = \frac{1}{2}(AD + BC)$，所以，$2EF > AD + BC$.

分析二 如图 19－13 所示，将两相同的梯形拼接在一起，则四边形 $ABMN$ 为平行四边形，$AN = AD + BC$，作 $EG // AN$，交 MN 于 G，问题转化为证明 $EF > \frac{1}{2}EG$. 这一点显而易见.

如图 19－13，延长 AD 到 N，使 $DN = BC$，延长 BC 到 M，使 $CM = AD$. 连结 MN，则 $AN \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BM$，四边形 $ABMN$ 为平行四边形. 过 E 作 $EG // AN$，交 MN 于 G，则 $EG = AN$，且 $NG = AE = CF$. 连结 FG，显然 $EF = FG$.

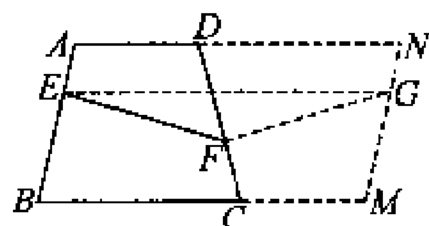


图 19－13

在△FGE 中，$EF + FG > EG$，即 $2EF > AN = AD + BC$.

例 8 如图 19－14，梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AB = CD$，$\angle AOD = 60°$，点 E、F、M、N 分别是 DO、CO、AB、EF 的中点. 求证：$MN \perp EF$.

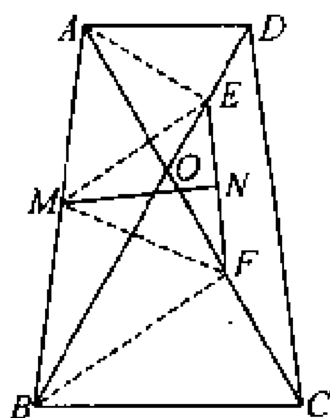


图 19－14

分析 注意到 N 为 EF 中点，只需证明 $ME = MF$. 注意△AOD 为等边三角形，$\angle AEO = 90°$，则有 $ME = \frac{1}{2}AB$. 同样还有 $MF = \frac{1}{2}AB$.

例 9 A、B 是两个定点，C 是位于直线 AB 某一侧的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在△ABC 的外部作正方形 $CADI$、$CBEF$. 求证：无论 C 点在什么位置上，DE 中点 M 的位置不变.

证明 如图 19－15，分别作 DP、CH、EQ 垂直于 AB，垂足分别为 P、H、Q. 因 $\angle 1 = 90° - \angle 3 = \angle 2$，$AC = AD$，故 Rt△$ACH$≌△$DAP$. 于是 $DP = AB$. 同理 $EQ = BH$，$BQ = CH$，从而 $BQ = AP$.

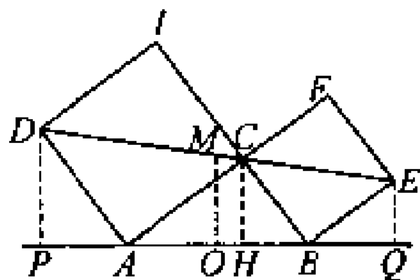


图 19－15

取 AB 的中点 O，显然也是 PQ 的中点.

连结 MO,因 $DP\perp AB$,$EQ\perp AB$,故 $EQ/\!/DP$,四边形 $DPQE$ 是梯形(或平行四边形),MO 为其中位线,故 $MO=\frac{1}{2}(DP+EQ)=\frac{1}{2}(AH+BH)=\frac{1}{2}AB$,且 $MO\perp AB$.从而 M 是 AB 的垂直平分线上距 AH 之长为 $\frac{1}{2}AB$ 的一个定点.

练 习 十 九

一、选择题

1.若等腰梯形的大底与对角线等长,小底与高等长,则小底与大底之比是 (　　)

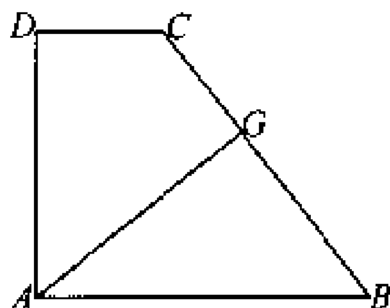
(A)1:2　(B)2:2　(C)3:4　(4)3:5

2.等腰梯形的两条对角线互相垂直,则其高 h 与中位线 m 之间的关系是 (　　)

(A)$m>h$　(B)$m=h$　(C)$m<h$　(D)不能确定

3.如图,在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$\angle D=90°$,$AB=BC$,$AG\perp BC$ 于 G,$CG=\frac{1}{3}AB$,则 $\frac{CD}{AB}=$ (　　)

(A)$\frac{1}{4}$　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{2}{5}$



(第3题)

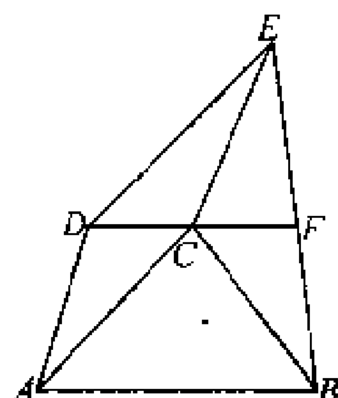
二、填空题

4.梯形的对角互补,最大角是最小角的3倍,上底长为 a,下底长为 $b(b>a)$,则上底与下底的距离为________.

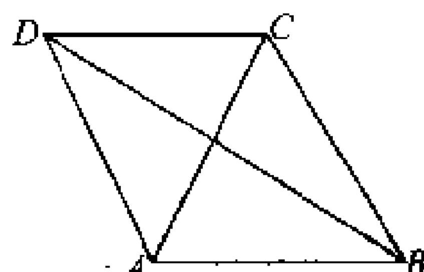
5.等腰梯形的对角线长为17cm,上、下底分别为10cm,20cm,则它的面积为________.

6.如图,在梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,以 AC、AD 为边作▱$ACED$,DC 的延长线交 BE 于 F,则 $EF:FB=$________.

7. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$DC // AB$，$BC = 2$，$AB = AC = AD = \sqrt{5}$. 则 $BD =$ ____.



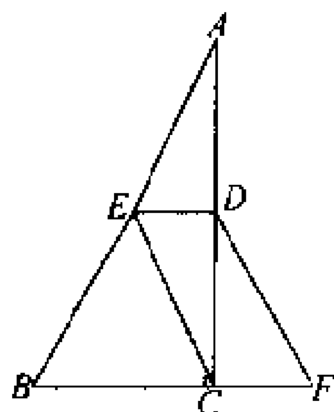
（第 6 题）



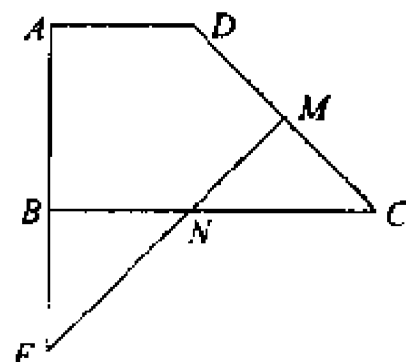
（第 7 题）

三、解答题

8. 如图，在直角三角形 ABC 中，E 是斜边 AB 上的中点，D 是 AC 的中点，$DF // EC$，交 BC 延长线于 F. 求证：四边形 $EBFD$ 是等腰梯形.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle A = 90°$，$\angle ADC = 135°$，CD 的垂直平分线交 BC 于 N，交 AB 延长线于 F，垂足为 M. 求证：$AD = BF$.

10. 设 a，b，c 分别为等腰梯形 $ABCD$ 的上底、下底和腰的长，m 为对角线长. 求证：$m^2 = c^2 + ab$.

11. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AC = BD$，求证：$AB = DC$.

12. 用长为 1，4，4，5 的线段为边构作梯形. 试求面积最小的那个

梯形的两条对角线长度的和.

13.试证:若梯形内部的 $n(\geqslant 3)$ 个点到梯形四边距离之和相等,则这 n 个点在同一直线上.

第二十讲　三角形的中位线

知识点和方法述要

1.(1)连结三角形的两边中点的线段,叫三角形的中位线.

(2)三角形的中位线定理　平行于第三边,并且等于它的一半.

2.三角形中位线定理得到了两方面结论,一是中位线与第三边的位置关系;二是中位线与第三边的大小关系.三角形中位线可看作梯形中位线的特殊情形,是解决几何问题的最为常见的辅助线之一,在题目中出现线段的中点时尤为突出.

例1　如图20-1,$\triangle ABC$中,M是BC的中点,$AB=CD$,F是AD的中点,MF的延长线交BA的延长线于E点,求证:$AE=AF$.

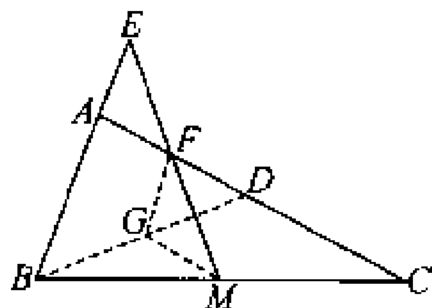


图20-1

证明　连结BD,取BD的中点G,连FG、MG.由F、M分别为AD、BC中点,可得$FG \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AB$,$GM \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$,因$AB=CD$,故$GF=GM$,有$\angle GFM=\angle GMF$.又因$\angle E=\angle GFM$,$\angle EFA=\angle CFM=\angle FMG$,所以$\angle E=\angle AFE$,$AE=AF$.

例2　如图20-2,$\triangle ABC$与$\triangle PMN$都是等边三角形.P、Q、R分别为$\triangle ABC$各边的中点,点M在QC上.求证:$QM=RN$.

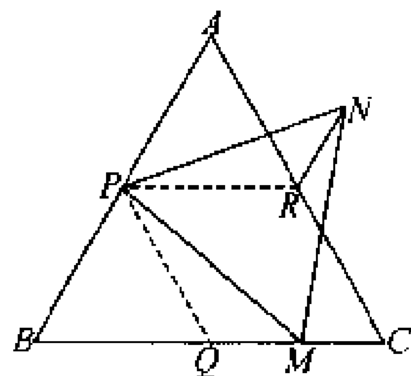


图20-2

证明　连结PQ、PR.因P、Q、R是AB、BC、CA的中点,故$PR \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BC$,$PQ \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AC$,因$AC=BC$,所以$PR=PQ$.又$PR \underline{\underline{/\!/}} QC$,故四边形$PQCR$为平行四边形,$\angle RPQ=\angle C=60°$,于是$\angle QPM+\angle MPR=\angle RPN+\angle RPM=60°$,可得$\angle QPM=$

$\angle RPN$，$PM=PN$，所以$\triangle QPM\cong\triangle RPN$，有 $QM=RN$.

例3 如图 20－3，$\triangle ABC$ 中，$BD=DC$，AG 平分$\angle DAC$，$BF\perp AG$，与 AD 交于 E，与 AC 交于 F，求证：$DE=\frac{1}{2}CF$.

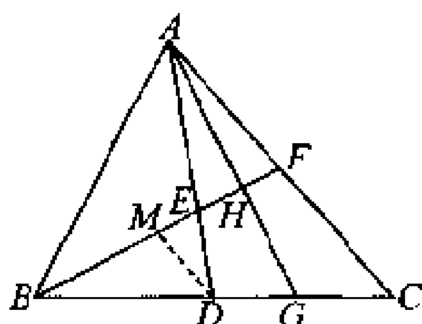


图 20－3

证明 因$\angle EAH=\angle FAB$，AH 公共，故 $Rt\triangle AHE\cong Rt\triangle AHF$，有$\angle AFE=\angle AEF$. 取 BF 中点 M，连 DM，则 $DM \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} \frac{1}{2}FC$，有$\angle AFM=\angle DMF$. 又$\angle AEF=\angle DEM$，所以$\angle DEM=\angle EMD$. 于是 $DE=DM=\frac{1}{2}FC$.

例4 如图 20－4，$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AE 平分$\angle BAC$，$CE\perp AE$，G 为 BC 边上的中点，求证：$EG=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

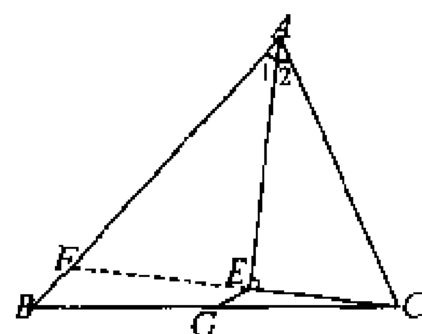


图 20－4

证明 因 $AB>AC$，延长 CE 交射线 AB 于 F. 因$\angle BAG=\angle CAG$，AE 公共，故 $Rt\triangle AEF\cong Rt\triangle AEC$，有 $CE=EF$，$AF=AC$，因 $AB>AC$，故 E 在线段 AB 上，因 G 为 BC 中点，故

$$EG=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}(AB-AF)=\frac{1}{2}(AB-AC).$$

例5 如图 20－5，五边形 $ABCDE$ 中，$\angle ABC=\angle AED=90°$，$\angle BAC=\angle EAD$，$F$ 是CD 的中点，求证：$FB=FE$.

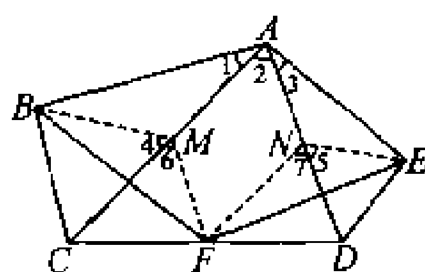


图 20－5

证明 取 AC、AD 的中点 M、N，连结 MB、MF、NE、NF，则有 $MF=\frac{1}{2}AD$，$MF/\!/AD$，$NF=\frac{1}{2}AC$，$NF/\!/AC$ 及$BM=\frac{1}{2}AC$，$EN=\frac{1}{2}AD$. 于是有$\angle 6=\angle 2$，$\angle 7=\angle 2$. 从而$\angle 6=$

$\angle 7$. 进而可得 $MB=FN$, $MF=NE$. 又 $4=2\angle 1=2\angle 3=\angle 5$, 故$\angle 4+\angle 6=\angle 5+\angle 7$, 即$\angle BMF=\angle FNE$. 所以$\triangle BMF\cong\triangle FNE$. 于是 $FB=FE$.

例 6 如图 20 - 6 所示, $\triangle ABC$ 中, $\angle B$、$\angle C$ 的平分线 BE、CF 相交于 O, $AG\perp BE$ 于 G, $AH\perp CF$ 于 H.

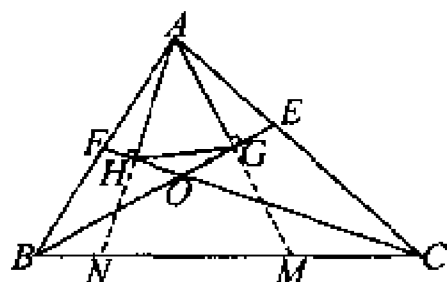


图 20 - 6

(1)求证: $GH/\!/BC$;

(2)若 $AH=9$ 厘米, $AC=14$ 厘米, $BC=18$ 厘米, 求 GH.

解 (1)分别延长 AG、AH 交 BC 于 M、N. 因$\angle ACH=\angle HCN$, CH 公共, 故 Rt$\triangle AHC\cong$Rt$\triangle NHC$, $AH=HM$. 同理 $AG=GM$. 所以 $GH/\!/MN$, 即 $GH/\!/BC$.

(2)由(1)知$AB=MB$, $AC=NC$, 故

$$AB+AC=BM+NC=BC+MN,$$

有

$$MN=AH+AC-BC=9+14-18=5(\text{厘米}).$$

于是

$$GH=\frac{1}{2}MN=\frac{5}{2}(\text{厘米}).$$

例 7 如图 20 - 7, 在$\triangle ABC$ 中, $AC>AB$, 在它的两边 AB、AC 上分别截取 $BD=CE$. 若 F、G 分别是 BC 和 DE 的中点, 求证: FG 和$\angle BAC$ 的平分线 AT 平行.

证明 过 D 作 $DN\perp AT$, DN 与 AT 相交于 N, 与 AC 相交于 L; 过 B 作 $BK\perp AK$, BK 与 AT 相交于 K, 与 AC 相交于 M. 连结 NG、KF. 因$\angle DAN=\angle LAN$, AN 公共, 故 Rt$\triangle AND\cong$Rt$\triangle ANL$, 有 $DN=LN$, 即 N 是 DL 中点, 又 G 是 DE 中点. 于是 NG 是$\triangle DEL$ 的中位线, 从而 $NG/\!/LE$, $NG=\frac{1}{2}LE$. 同理可证 $FK/\!/CM$, FK

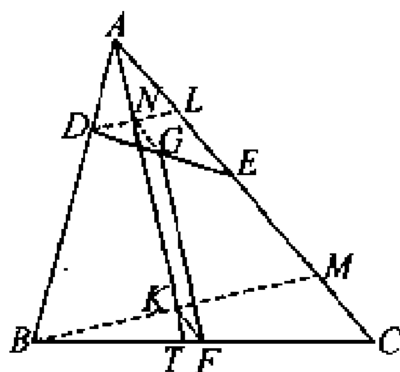


图 20 - 7

$=\frac{1}{2}CM$. 由 $AD=AL$, $AB=AM$, 得 $BD=ML$, 又 $BD=CE$, 故 $CE=ML$, 从而 $CM=LE$. 于是 $FK=HG$. 所以四边形 $NGFT$ 是平行四边形, $GF\parallel NK$, 即 $GF\parallel AT$.

例 8 如图 20-8, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=DC$, E、F 分别为 AD 和 BC 的中点.

(1) FE 的延长线分别交 CD 的延长线和 BA 的延长线于点 N、M, 求证: $\angle BMF=CNF$.

(2) 若 $GH\perp EF$, 分别交 AB、DC 于 G、H, 求证: $\angle AGH=\angle DHG$.

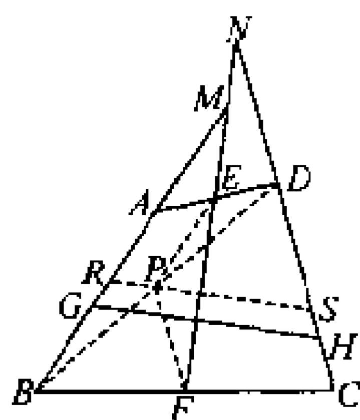


图 20-8

证明 (1) 取 BD 中点 P, 连结 PE、PF, 则 PE、PF 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的中位线, $PE \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}AB$, $PF \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}CD$. 有 $\angle BMF=\angle PEF$, $\angle CNF=\angle NFP$. 因 $AB=CD$, 故 $PE=PF$, $\angle PEF=\angle PFE$. 所以 $\angle BMF=\angle CNF$.

(2) 过 P 作 $RS\perp NF$ 分别交 AB、CD 于 R、S, 则 $RS\parallel GH$, 有 $\angle EPS=\angle AGH$, $\angle NSP=\angle FPS$, 且 $\angle EPS=\angle FPS$. 所以 $\angle AGH=\angle DHG$.

注 例 8 中也可过 E 分别作 AB、DC 平行线, 将 AB、CD"移"到过点 E 位置, 或过 D 作 AB 平行线将 AB 移到过点 D 位置使命题获证.

例 9 如图 20-9, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle B=\angle D=90°$, 且 $\angle A\neq\angle C$, 求证: $AC>BD$.

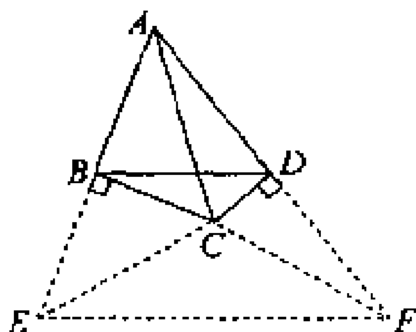


图 20-9

证明 延长 AB、AD 到 E、F, 使 $BE=BA$, $DF=DA$, 连结 CE、CF、EF. 因 $CB\perp AB$, 故 BC 为 AE 的垂直平分线, 可得 $CA=CE$. 同理, $CA=CF$. 又 BD 是 $\triangle AEF$ 的中位线, 有 $BD=\frac{1}{2}EF$. 注意到 $CE+CF>EF$, 故 $2AC>$

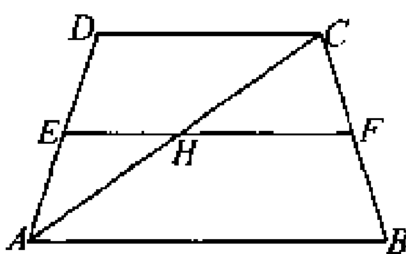
$2BD$,即 $AC > BD$.

练 习 二 十

一、填空题

1. 梯形中位线长 25cm,它被一条对角线分成的两部分之差为 5cm,则梯形的上底长为______.

2. 等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB // CD$,$AD = BC = 12$,中位线 EF 与对角线 AC 交于 H,且 $EH = 4$,$HF = 10$,则$\angle D =$____.

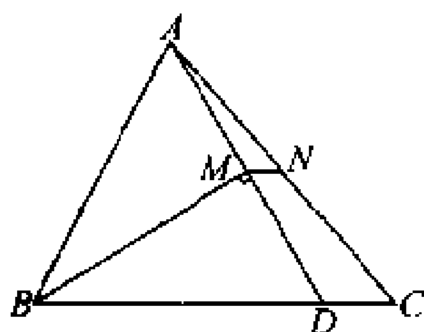


(第 2 题)

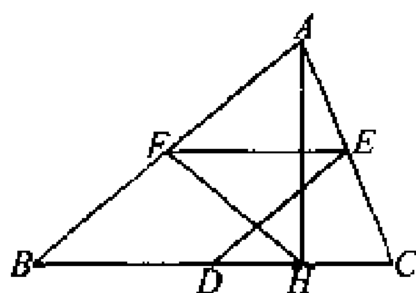
3. 已知$\triangle ABC$ 中,D 为 AB 的中点,E 为 AC 上一点,$AE = 2CE$,CD、BE 交于 O 点,$OE = 2$ 厘米,则 BO 的长等于______.

二、解答题

4. 如图,在$\triangle ABC$ 中,$AB = BD$,$BM \perp AD$ 于 M,N 是 AC 的中点,求证:$DC = 2MN$.



(第 4 题)



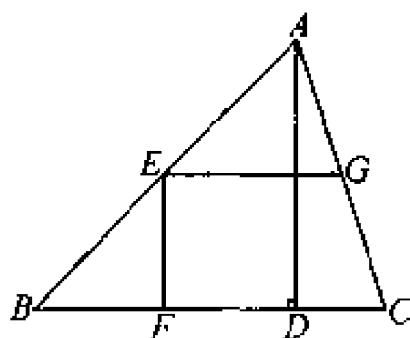
(第 5 题)

5. 在$\triangle ABC$ 中,$AH \perp BC$ 于 H,E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点(如图),求证:$\angle DEF = \angle HFE$.

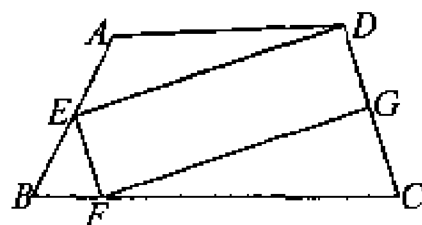
6. 在四边形 $ABCD$ 中,$CD > AB$,E、F 分别是 AC、BD 的中点,求证:$EF \geqslant \frac{1}{2}(CD - AB)$.

7. 如图所示,$\triangle ABC$ 中,$AD \perp BC$ 于 D. E、F、G 分别是 AB、BD、

AC 的中点.若 $EG=\frac{3}{2}EF$,$AD+EF=12$ 厘米,求△ABC 的面积.



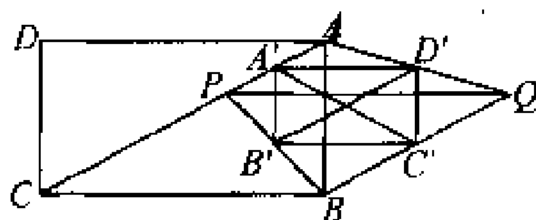
(第7题)



(第8题)

8.梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,E 为 AB 的中点,$EF/\!/DC$,交于 F,$FG/\!/ED$,交 CD 于 G.求证:G 为 CD 的中点.

9.如图,P 是矩形 $ABCD$ 内的一点,四边形 $BCPQ$ 是平行四边形,A'、B'、C'、D' 分别是 AP、PB、BQ、QA 的中点.求证:$A'C'=B'D'$.



(第9题)

10.P 为△ABC 内一点,$\angle PAC=\angle PBC$.由 P 作 BC、AC 垂线,垂足分别是 L、M,设 D 为 AB 中点,求证:$DM=DL$.

11.在 Rt△ABC 中,D、E 分别是直角边 BC、AC 上的任意点,M、N、P、Q 分别是 DE、BE、AB、AD 的中点,求证:$MP=NQ$.

12.正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 在正方形 $ABCD$ 的内部.A_2、B_2、C_2、D_2 分别是 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 的中点.试证:$A_2B_2C_2D_2$ 也是正方形.

第二十一讲　比例线段

知识点和方法述要

1.(1)平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

推论　平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例.

(2)如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

(3)平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例.

2.(1)在证明线段相等时，我们常常先证明它们分别与第三个量相等，通过“等量代换”得到所需的结论，即证 $a=c$，$b=c$，得 $a=b$. 在证明线段成比例，即证两个比相等时，可注意把每个比看作一个整体，分别证明它们与第三个比相等，通过“中间比”过渡，由证$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，$\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$，得$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 寻找“中间比”，常需要从复杂图形中分解出基本图形，“中间比”又常是两个基本图形共有的两条线段的比.

(2)过一点作已知直线的平行线，从而构造出运用平行线分线段成比例定理的基本图形，以便将关系不明显的线段“移”到关系较明显的线段上去也是一种常用的方法.

3.三角形中角的平分线将对边所分成的两部分和两邻边成比例.反之也成立.

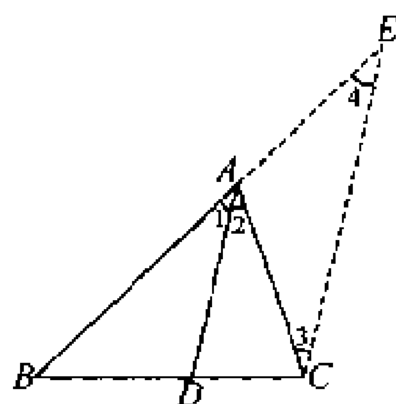


图 21－1

如图 21－1，AD 为$\triangle ABC$ 的一条角的平分线，过 C 作 $CE\parallel AD$，交 BA 延长线于 E，有

$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$．于是$\angle 3=\angle 4$，有 $AE=AC$．又$\frac{BA}{AE}=\frac{BD}{DC}$，故$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$．

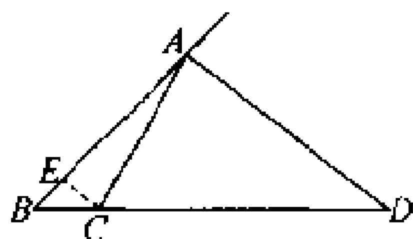


图 21－2

三角形的外角平分线也有类似性质．如图 21－2，AD 为$\triangle ABC$ 一条外角平分线，则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$．

例 题 精 讲

例1 已知：如图 21－3，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，$BD:DC=3:1$，G 为 AD 中点，连结 BG 并延长交 AC 于 E．

求证：$EG:GB=1:7$．

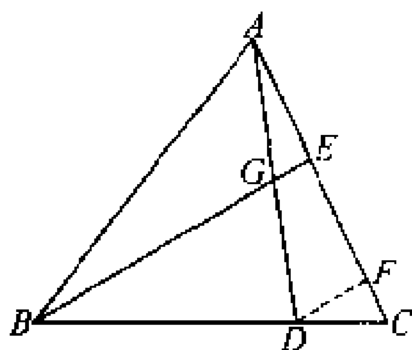


图 21－3

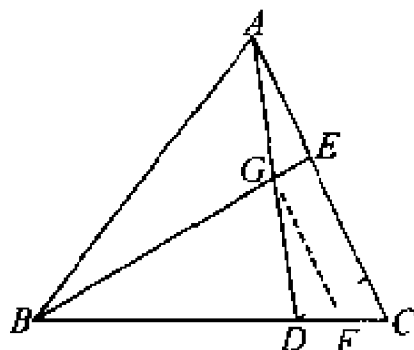


图 21－4

证一 过 D 作 $DF /\!/ BE$，交 AC 于 F．因 G 为 AD 中点，故 $AG=GD$，进而有 $AE=EF$，$GE=\frac{1}{2}DF$．又 $DF /\!/ BE$，所以$\frac{DF}{BE}=\frac{CD}{CB}$．因$\frac{BD}{DC}=3$，故

$$\frac{DF}{BE}=\frac{CD}{CB}=\frac{CD}{BD+DC}=\frac{1}{4}.$$

于是
$$\frac{EG}{GB}=\frac{GE}{BE-GE}=\frac{\frac{1}{2}DF}{4DF-\frac{1}{2}DF}=\frac{1}{7}.$$

证二 过 G 作 $GF /\!/ AC$，交 DC 于 F，如图 21－4，则 $\frac{EG}{GB}=\frac{CF}{FB}$. 因 $AG=GD$，所以 $CF=FD$，$CF=\frac{1}{2}CD$. 又 $\frac{BD}{DC}=3$，故

$$\frac{EG}{GB}=\frac{CF}{FB}=\frac{\frac{1}{2}CD}{3CD+\frac{1}{2}CD}=\frac{1}{7}.$$

注 上述两种证法中分别引进了不同的辅助线：$DF /\!/ BE$ 及 $GF /\!/ AC$，其目的都是为了构成平行线分线段成比例的基本图形，进而求出 $EG:GB$.

例 2 已知：如图 21－5，P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，连结 AP、BP、CP 分别延长交对边于 D、E、F. 求证

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1.$$

证明 过 P 作 $PH /\!/ AC$，$PG /\!/ AB$，分别交 BC 于 H、G，则 $\frac{FP}{PC}=\frac{HC}{BC}$，$\frac{PF}{CG}=\frac{BG}{GC}$. 又由 $\frac{PD}{AD}=\frac{GD}{BD}$，$\frac{PD}{AD}=\frac{DH}{DC}$，可得 $\frac{GD}{BD}=\frac{DH}{DC}$，故

$$\frac{GD+DH}{BD+DC}=\frac{GD}{BD}=\frac{PD}{AD},$$

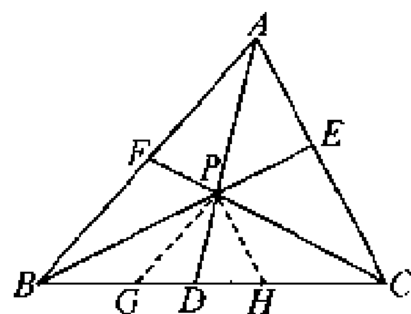


图 21－5

即 $\frac{GH}{BC}=\frac{PD}{AD}$. 于是

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{GH}{BC}+\frac{HC}{BC}+\frac{BG}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.$$

例 3 如图 21－6，已知 M、N 分别是 $\triangle ABC$ 两边 AB、AC 的中点，P 是 MN 上任一点，延长 BP、CP 交 AC、AB 于 K、H. 求证：$\frac{AH}{HB}+\frac{AK}{KC}=1$.

证明 过 A 作 BC 的平行线与 BK、CH 的延长线分别交于 E、F，则

$$\frac{AH}{HB}=\frac{AF}{BC},$$

$$\frac{AK}{KC}=\frac{AE}{BC},$$

所以 $\frac{AH}{HB}+\frac{AK}{KC}=\frac{AF+AE}{BC}.$

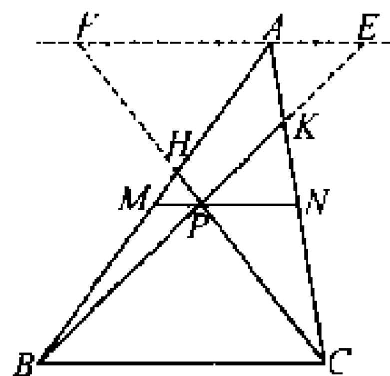


图 21－6

在△FCA 中，因 $AN=NC$，$PN/\!/FE$，故 $CP=PF$，有 $PN=\frac{1}{2}AF$. 同理 $PM=\frac{1}{2}AE$. 代入①得

$$\frac{AH}{HB}+\frac{AK}{KC}=\frac{2PN+2PM}{2MN}=\frac{2MN}{2MN}=1.$$

例 4 如图 21－7，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 和 BD 交于点 O，过 O 引 BC 的平行线和直线 AB、CD 及 AD 的延长线分别交于点 P、Q、R. 求证：$OR^2=PR\cdot QR$.

证明 延长 AR、BC 交于点 M. 因 $PR/\!/BM$，故

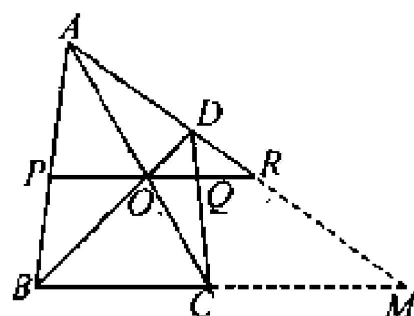


图 21－7

$$\frac{OR}{BM}=\frac{DO}{DB},$$

$$\frac{OR}{CM}=\frac{AO}{AC},$$

$$\frac{BM}{PR}=\frac{AC}{AO},$$

$$\frac{CM}{QR}=\frac{DB}{DO}.$$

将上述各式相乘，得

$$\frac{OR^2}{PR\cdot QR}=1,$$

即

$$OR^2=PR\cdot QR.$$

例 5 如图 21－8，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 上的一点，直线 BE 与 AD 的延长线交于 F，$S_{\triangle ABE}:S_{\triangle AEF}=3:1$. 求 $AF:DF$ 的值.

解 因$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{BE}{EF}$，$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{3}{1}$，故$\frac{BE}{BF}=\frac{3}{1}$。因 $DE // AB$，所以

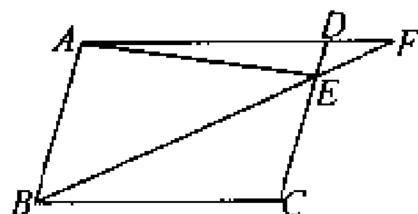


图 21-8

$$\frac{AF}{DF}=\frac{BF}{EF}=\frac{BE+EF}{EF}=\frac{BE}{EF}+\frac{EF}{EF}=4.$$

例 6 已知：如图 21-9，正方形 $ABCD$ 中，E 是对角线 BD 上一点，过 D 点作 $DG \perp AE$ 交 AC 于 F，垂足为 G。求证：$EF // AB$。

分析 欲证 $EF // AB$，只需证$\frac{OF}{OA}=\frac{OE}{OB}$，即只需证 $OF=OE$。

因 $\angle DOA=\angle AGF=90°$，$\angle OFD=\angle AFG$，故$\angle 1=\angle 2$。又$\angle CDO=\angle DAO=45°$，所以 $\angle CDF=\angle DAE$。因 $\angle DCO=\angle ADE=45°$，$CD=DA$，故$\triangle CDF\cong\triangle DAE$，可得 $DE=CF$。又 $OC=OD$，故 $OE=OF$。因 $OA=OB$，所以 $EF // AB$。

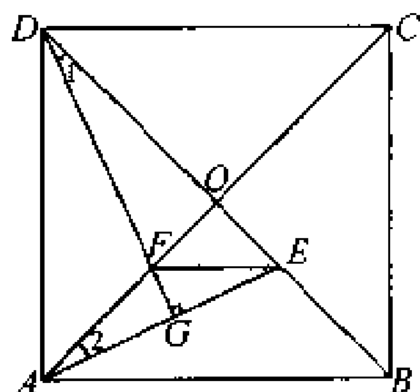


图 21-9

例 7 已知：图 21-10，在矩形 $ABCD$ 中，点 M 是 AD 的中点，N 是 BC 的中点，P 是 CD 延长线上一点，PM 交 AC 于 Q，MN 交 AC 于 O。求证$\angle QNM=\angle MNP$。

分析 欲证$\angle QNM=\angle MNP$，根据角平分线性质，可转而证明$\frac{QM}{MP}=\frac{QN}{NP}$。过 M 作 $MK // NP$，交 QN 于K，则

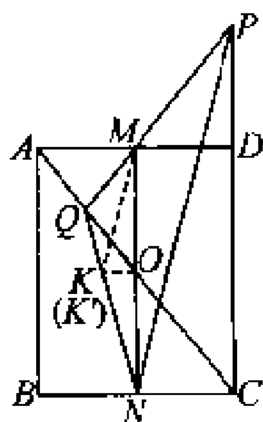


图 21-10

$$\frac{QM}{MP}=\frac{QK}{KN},\qquad ①$$

$$\frac{QK}{QN}=\frac{KM}{NP}.\qquad ②$$

②可变为

$$\frac{QN}{NP}=\frac{QK}{KM}.\qquad ③$$

根据欲证结论，由①，③知，如果结论成立，那么 $KM=KN$. 注意到 O 为 MN 的中点，K 应为 MN 的中垂线与 QN 的交点，$OK/\!/BC$，过 O 作 $OK'/\!/BC$，交 QN 于 K'，连 MK'，在 $\triangle QPC$ 中，$MO/\!/PC$，

则

$$\frac{QM}{MP}=\frac{QO}{OC}.$$

在 $\triangle QNC$ 中，$OK'/\!/CN$，有

$$\frac{QK'}{K'N}=\frac{QO}{OC}.$$

于是，

$$\frac{QM}{MP}=\frac{QK'}{K'P},$$

可知 $K'M/\!/NP$，所以 $\angle MNP=\angle K'MN$. 又 $AD \mathrel{\underline{/\!/}} BC$，$M$、$N$ 分别为 AD、BC 的中点，故 $AM \mathrel{\underline{/\!/}} NC$，即四边形 $ANCM$ 为平行四边形，$OM=ON$. 又 $OK'\perp MN$，故 $K'M=MN$，可得 $\angle K'MN=\angle K'NM$，即 $\angle QNM=\angle MNP$.

例 8　已知 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，过 B 作 $BD\perp AE$，垂足为 D，AM 与 BD 相交于 F，求证：$EF/\!/AB$.

证明　如图 21－11，设 BD 交 AC 于 B' 连结 MD，易知 D 是 BB' 的中点，故有 $DM/\!/B'C$，于是 $DM:AB'=FM:AF$.

过 M 作 $MG/\!/AB$，交 AE 延长线于 G，则 $\angle G=\angle BAE=\angle CAE=\angle MDE$，故有 $MG=MD$. 又 $AB=AB'$，于是 $FM:AF=DM:AB'=MG:AB=ME:EB$，所以 $EF/\!/AB$.

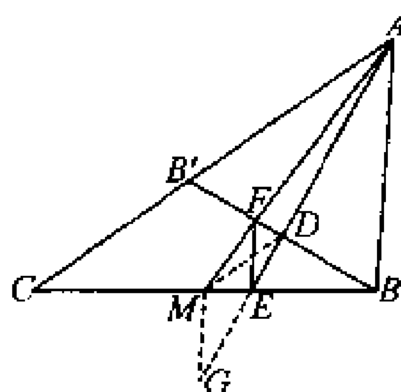


图 21－11

例 9　已知：如图 21－12，四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$，H 为垂足，$\angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 的平分线都通过 BD 上的点 G，且 $AC\neq BD$.

求证：$\triangle ABD\cong\triangle CBD$.

证明　因 AG 是 $\angle BAD$ 的平分线，故

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BG}{GD}.$$

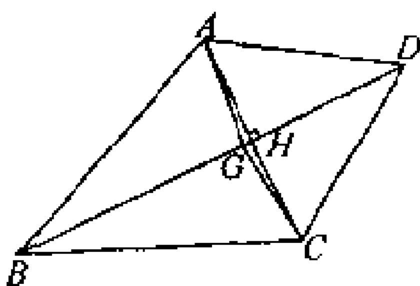


图 21-12

同理$\frac{BC}{CD}=\frac{BG}{GD}$. 所以$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CD}$.

设$\frac{AB}{AD}=t\ (t\neq1)$，则 $AB=tAD$，$BC=tCD$，又 $AC\perp BD$，所以

$$AB^2-BH^2=AD^2-DH^2.$$

于是
$$\begin{aligned}AB^2-AD^2&=BH^2-DH^2\\&=(BC^2-CH^2)-(CD^2-CH^2)\\&=BC^2-CD^2,\end{aligned}$$

即
$$t^2AD^2-AD^2=t^2CD^2-CD^2,$$

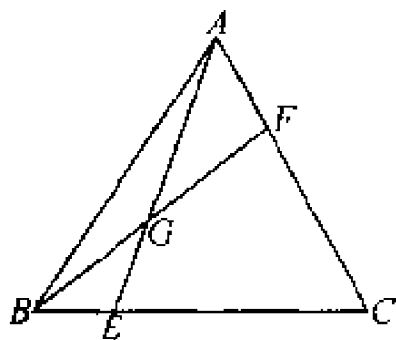
可知 $AD=CD$. 进而知 $AB=BC$，所以$\triangle ABD\cong\triangle CBD$.

注 利用代数进行有关比例线段的论证也是常常采取的方法.

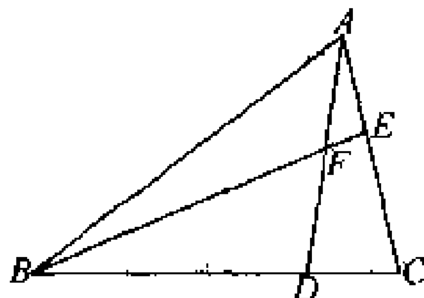
练 习 二 十 一

一、填空题

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，F 分 AC 为 1:2，G 是 BF 的中点，E 是 AG 与 BC 的交点，则 $BE:EC=$________.



(第 1 题)

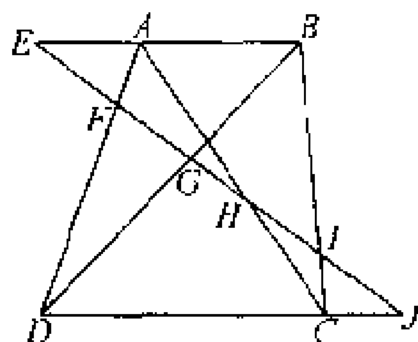


(第 2 题)

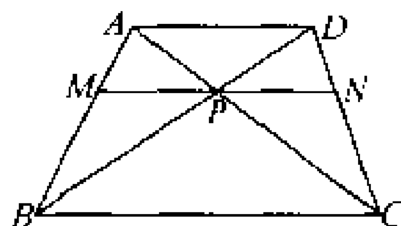
2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 BC、AC 上，且 $DC:BD=1:3$，$AE:EC=2:3$，AD 与 BE 交于 F，则 $AF:FD=$________.

3. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB<CD$. 一直线交 BA 的延

长线于 E,交 DC 延长线于 J,交 AD 于 F,交 BD 于 G,交 AC 于 H,交 BC 于 I.已知 $EF=FG=GH=HI=IJ$,则$\frac{DC}{AB}=$ ________.



(第3题)

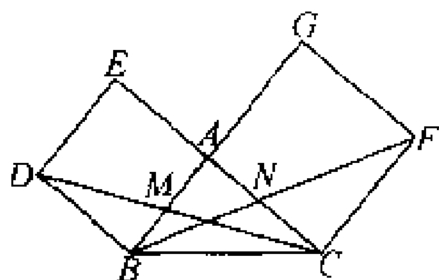


(第4题)

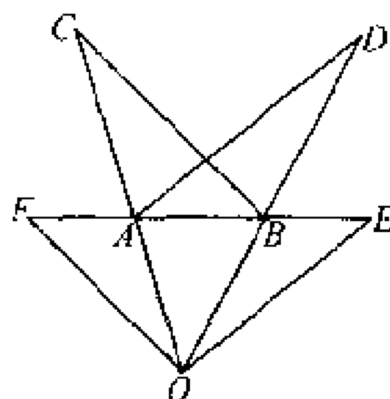
二、解答题

4.如图,梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,过梯形对角线的交点 P 作 $MN/\!/AD$,交 AB、CD 于 M、N.求证:$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{MN}$.

5.如图,以 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AB、AC 向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,连结 DC、BF 分别交 AB、AC 于 M、N 两点.求证:$AM=AN$.



(第5题)



(第6题)

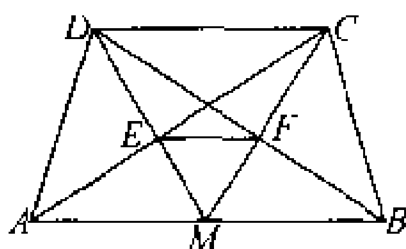
6.如图,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$,$C$、$D$ 在 AB 同侧,过 DB、CA 延长线的交点 O,作 $OE/\!/AD$,$OF/\!/BC$,OE、OF 分别交 AB(或 BA)延长线于 E、F.求证:$AE=BF$.

7.梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,M 为 AB 的中点,$AB=a$,$CD=b$,AC

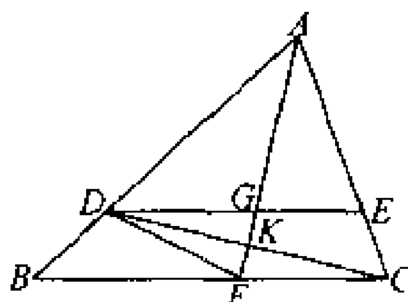
与 MD 相交于 E，BD 与 MC 相交于 F.

(1)求证：$EF \parallel CD$.

(2)求 EF 的长.



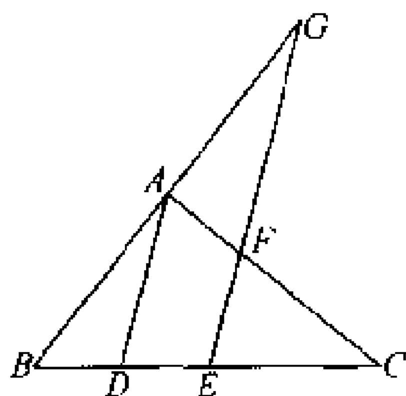
(第 7 题)



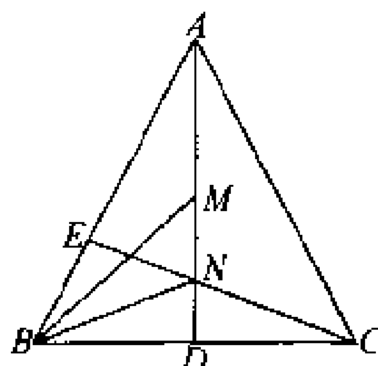
(第 8 题)

8. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，D 是 AB 边上的一点，且 $AD = AC$，$DE \parallel BC$，CD 平分$\angle EDF$，AF 交 DE 于 G，交 BC 于 F. 求证：$\frac{BF}{DF} = \frac{AD}{AE}$.

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E 是 BC 上两点，且 $AD \parallel EG$，EG 交 AC 于 F，交 BA 的延长线于 G. 若 $EF + EG = 2AD$，求证：AD 是$\triangle ABC$ 的中线.



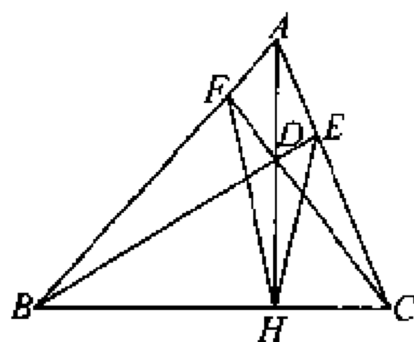
(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图，AD 是等腰$\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，BM 及 BN 是$\angle B$ 的三等分角线，分别交 AD 于 M、N 点，连结 CN 并延长交 AB 于 E. 求证：$\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB}$.

11. 如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，D 为高 AH 上任一点，BD、CD 分别交 AC、AB 于 E、F. 求证：$\angle AHE=\angle AHF$.



（第 11 题）

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BC 上的高 $AD=5$，M 为 AD 上一点，$MD=1$，且 $\angle BMC=3\angle BAC$，试求 $\triangle ABC$ 的周长.

第二十二讲　相似三角形

知识点和方法述要

1.(1)对应角相等、对应边成比例的三角形叫做相似三角形.相似三角形对应边的比叫做相似比.

(2)三角形相似的判定

(ⅰ)平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.

(ⅱ)两角对应相等,两三角形相似.

(ⅲ)两边对应成比例且夹角相等,两三角形相似.

(ⅳ)三边对应成比例,两三角形相似.

2.(ⅰ)斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似.

(ⅱ)有一个锐角相等的两个直角三角形相似.

(ⅲ)所有的等腰直角三角形相似;所有的等边三角形相似;顶角或底角相等的两个等腰三角形相似.

3.相似三角形的性质

(ⅰ)相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

(ⅱ)相似三角形周长的比等于相似比.

(ⅲ)相似三角形面积的比等于相似比的平方.

(ⅳ)相似三角形的对应角相等,对应边成比例.

4.射影定理　设 CD 是 Rt△ABC 斜边上的高(如图 22-1),则

(ⅰ) $CD^2 = AD \cdot DB$;

(ⅱ) $AC^2 = AD \cdot AB$;

(ⅲ) $BC^2 = BD \cdot BA$.

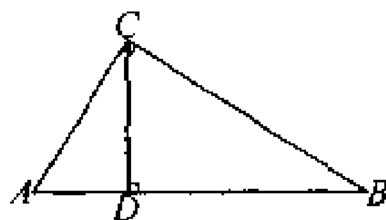


图 22-1

这里 AD、BD 分别称为 AC、BC 在 AB 上的射影.

4. 如果两个边数相同的多边形的对应角相等,对应边成比例,这两个多边形叫做相似多边形,相似多边形的对应边的比叫做相似比(或相似系数).两相似多边形的对应线段的比等于相似比,周长的比等于相似比,面积比等于相似比的平方.

5. 相似三角形有关知识应用极为广泛,在证明角相等、线段相等、线段成比例、两直线平行等方面都有重要应用.全等三角形可看作相似三角形的特殊情形.

例 题 精 讲

例1 已知,如图 22-2,矩形 $ABCD$ 中,$AD=a$,$AB=b$,P 为 AB 上一点,且 $AP:PB=2:1$,$CE\perp DP$ 于 E.求证:$CE=\dfrac{3ab}{\sqrt{9a^2+4b^2}}$.

证明 延长 DP,交 CB 的延长线于 F.因 $AB=b$,$AP:PB=2:1$,故 $AP=\dfrac{2}{3}b$,$BP=\dfrac{b}{3}$.因 $BF\parallel AD$,故 $\triangle ADP\backsim\triangle BFP$,有 $\dfrac{BF}{AD}=\dfrac{BP}{AP}$.于是 $BF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$.进而得 $CF=\dfrac{3}{2}a$,根据勾股定理,得

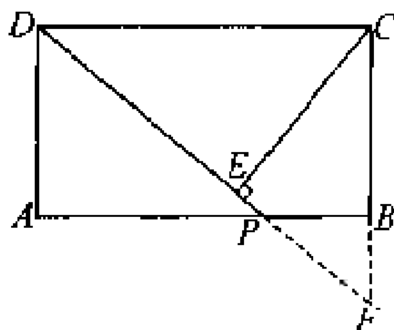


图 22-2

$$DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{b^2+(\frac{3}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{4b^2+9a^2}}{2}.$$

因 $CE\perp DF$,故 $S_{\triangle CDF}=\dfrac{1}{2}DF\cdot CE=\dfrac{1}{2}CD\cdot CF$,可得

$$CE=\frac{b\cdot\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{4b^2+9a^2}}{2}}=\frac{3ab}{\sqrt{9a^2+4b^2}}.$$

例2 已知:如图 22-3,线段 EF 平行于▱$ABCD$ 的一边 AD,BE 与 CF 交于一点 G,AE 与 DF 交于一点 H.求证:$\angle ABE=\angle HGE$.

证明 因 $EF\parallel AD\parallel BC$，故

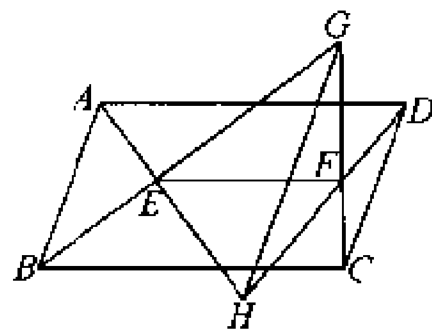


图 22－3

$$\frac{EF}{AD}=\frac{HE}{HA},\qquad ①$$

$$\frac{EF}{BC}=\frac{GE}{GB}.\qquad ②$$

因 $AD=BC$，由①，②得

$$\frac{HE}{HA}=\frac{GE}{GB}.$$

进而，有

$$\frac{HE}{HA-HE}=\frac{GE}{GB-GE},$$

即

$$\frac{HE}{EA}=\frac{GE}{EB}.$$

又$\angle GEH=\angle BEA$，所以$\triangle GEH\backsim\triangle BEA$，有$\angle ABE=\angle HGE$.

例3 已知：如图 22－4，四边形 $ABEG$、$GEFH$、$HFCD$ 都是边长为 a 的正方形．求证：$\angle AFE+\angle ACE=45^\circ$.

证明 根据勾股定理可得 $AE=\sqrt{2}a$，$AF=\sqrt{5}a$，$AC=\sqrt{10}a$.

在$\triangle AEF$ 与$\triangle CEA$ 中，

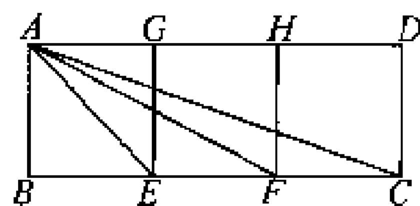


图 22－4

$$\frac{AE}{CE}=\frac{\sqrt{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{EF}{EA}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{AF}{CA}=\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故

$$\frac{AE}{CE}=\frac{EF}{EA}=\frac{AF}{CA}.$$

可知$\triangle AEF\backsim\triangle CAE$．有$\angle AFE=\angle CAE$．又 $AD\parallel BC$，有$\angle ACB=\angle DAC$．所以

$$\angle AFE+\angle ACE=\angle CAE+\angle DAC=\angle EAG=45^\circ.$$

例4 已知：如图 22－5(1)，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$．求证：$AC^2+AB\cdot AC=BC^2$.

证一 延长 CA 到 D，使 $DA = BA$，连结 DB（图 22－5(1)），则 $\angle D = \angle ABD$. 因 $\angle CAB = 2\angle CBA$，且 $\angle CAB = \angle D + \angle ABD = 2\angle D$，故 $\angle CBA = \angle D$. 又 $\angle C$ 公共，故 $\triangle BCA \backsim \triangle DCB$，有 $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$，即 $BC^2 = AC \cdot CD$. 又 $CD = CA + AD = CA + AB$，所以

$$BC^2 = AC(CA + AB) = AC^2 + AB \cdot AC.$$

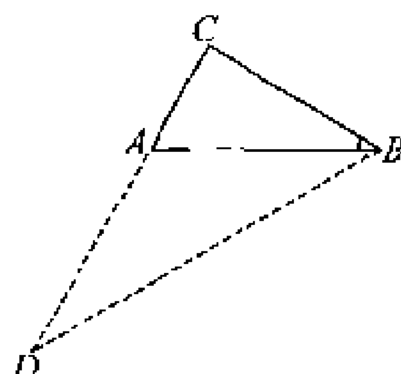


图 22－5(1)

证二 作 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D（图 22－5(2)），则

$$\angle CAD = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle B.$$

又 $\angle C$ 公共，故 $\triangle ACD \backsim \triangle BCA$，有

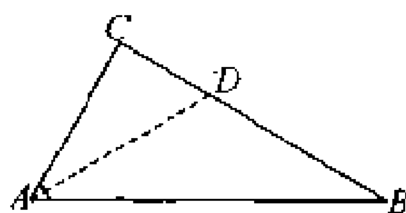


图 22－5(2)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AB}.$$

于是，有

$$AC^2 = BC \cdot CD = BC(BC - BD) = BC^2 - BC \cdot BD. \quad ①$$

因 $BC \cdot AD = AB \cdot AC$，$AD = DB$，所以 $BC \cdot BD = AB \cdot AC$. 代入①即可得

$$AC^2 + AB \cdot AC = BC^2.$$

例 5 已知：如图 22－6，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，DE 垂直平分 AB 交 BC 的延长线于 D. 求证：$AB^2 = BC \cdot BD$.

分析 作 BC 边上的高 AF，则 AF 平分 BC. 又 DE 垂直平分 AB，过 A 作 $AG /\!/ DE$，交 BD 延长线于 G，则 D 为 BG 的中点，$\angle BAG = 90°$，$AB^2 = BF \cdot BG$. 现只需证明 $BC \cdot BD = BF \cdot BG$. 这一点不难办到. 这是因为

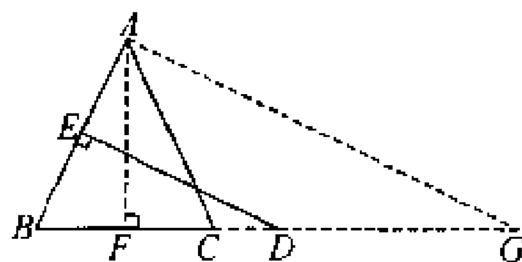


图 22－6

$$AB^2 = 2BF \cdot \frac{1}{2}BG = BC \cdot BD.$$

例 6 如图 22－7，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F. 求证：$\frac{AE}{BF}=\frac{AC^3}{BC^3}$.

证明 由 $\angle ACB=90°$ 及 $CD\perp AB$，可得 $AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$，从而 $\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD}{BD}$.

由 $\angle CDA=90°$ 及 $DE\perp AC$，可得 $AD^2=AE\cdot AC$，同理 $DB^2=BF\cdot BC$，故有

$$\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{AE\cdot AC}{BF\cdot BC},$$

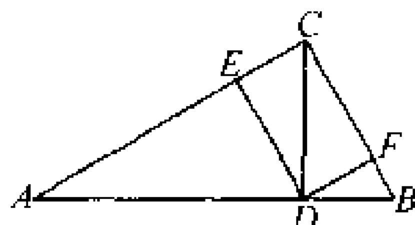


图 22－7

从而
$$\frac{AC^4}{BC^4}=\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{AE\cdot AC}{BF\cdot BC}.$$

所以
$$\frac{AD^3}{BC^3}=\frac{AE}{BF}.$$

例 7 已知：如图 22－8，在△ABC 中，AD 是∠A 的平分线，AD 的垂直平分线交 AD 于 E，交 BC 的延长线于 F. 求证：$FD^2=FB\cdot FC$.

分析 注意到 EF 为线段 AD 的垂直平分线，连结 FA，有 $AF=DF$. 问题等价于证明 $AF^2=FB\cdot FC$，这只需证明△AFC∽△BFA.

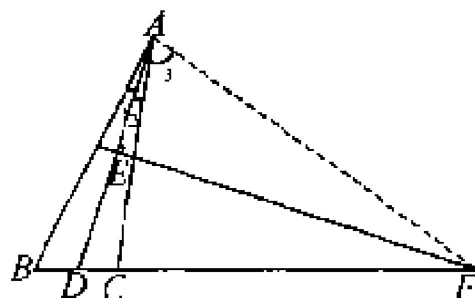


图 22－8

因 AD 是∠A 的平分线，$\angle 1=\angle 2$，且 $\angle FAD=\angle FDA$，故 $\angle FDA-\angle 1=\angle FAD-\angle 2$，即 $\angle B=\angle 3$. 又∠AFC 公共，所以△AFC∽△BFA，有 $\frac{FA}{FB}=\frac{FC}{FA}$，即 $FA^2=FB\cdot FC$. 注意到 $FA=FD$，故 $FD^2=FB\cdot FC$.

例 8 已知，如图 22－9，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，CE 是 $\angle BCD$ 的平分线，$CE\perp AD$ 于 E，$DE=2AE$，CE 把梯形分成面积为 S_1 和 S_2 的两部分．若 $S_1=m$，求 S_2.

解 设 CB 与 DA 的延长线交于 F. 因 $CE\perp AD$，有 $\angle CED=$

$\angle CEF=90°$，又$\angle 1=\angle 2$，故$\triangle CED\cong\triangle CEF$. 于是$S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CDE}=S_1=m$，且$EF=ED$. 因$DE=2AE$，故$A$为$EF$的中点. 因$AB\parallel CD$，所以$\triangle AFB\backsim\triangle DFC$，可得

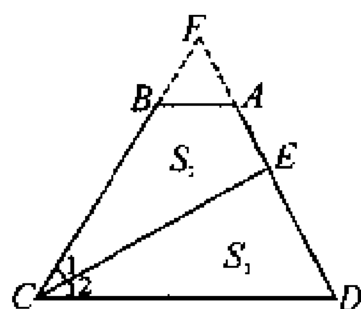


图 22－9

$$\frac{S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle DFC}}=\left(\frac{AF}{DF}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}DE}{2DE}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

又$S_{\triangle DFC}=2S_{\triangle DEC}=2m$，所以

$$S_{\triangle AFB}=\frac{1}{16}S_{\triangle DFC}=\frac{m}{8}.$$

于是
$$S_2=m-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}m.$$

例 9　如图 22－10，$\triangle PQR$与$\triangle P'Q'R'$是两个全等的等边三角形，六边形$ABCDEF$的边长分别记为$AB=a_1$，$BC=b_1$，$CD=a_2$，$DE=b_2$，$EF=a_3$，$FA=b_3$. 求证：$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

证明　易证$\triangle PAB\backsim\triangle Q'CB\backsim\triangle QCD\backsim\triangle R'ED\backsim\triangle REF\backsim\triangle P'AF$.

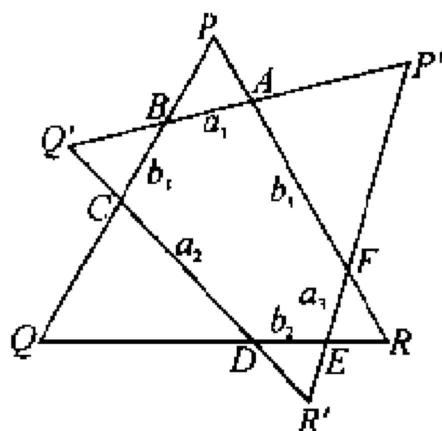


图 22－10

依次记上述六个三角形面积为S_1，S'_1，S_2，S'_2，S_3，S'_3，显然有

$$S_1+S_2+S_3=S'_1+S'_2+S'_3.$$

由$\frac{b_1^2}{a_1^2}=\frac{S'_1}{S_1}$，$\frac{b_2^2}{a_1^2}=\frac{S'_2}{S_1}$，$\frac{b_3^2}{a_1^2}=\frac{S'_3}{S_1}$，得

$$\frac{a_1^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_1}{S'_1+S'_2+S'_3}.$$

同理，有
$$\frac{a_2^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_2}{S'_1+S'_2+S'_3},$$

$$\frac{a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_3}{S'_1+S'_2+S'_3}.$$

三式相加，即得$a_1^2+a_2^2+a_3^3=b_1^2+b_2^2+a_3^3$.

练 习 二 十 二

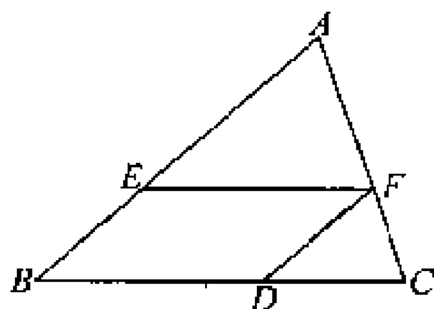
一、选择题

1. 把一个矩形对折，所得的矩形和原矩形相似，则原矩形的长宽之比为 (   ).

(A)2∶1 (B)3∶1 (C)$\sqrt{2}$∶1 (D)$\sqrt{3}$∶1

2. 如图，$EF \parallel BC$，$FD \parallel AB$，$BD = \frac{3}{5}BC$，则 $BE:EA$ 等于 (   ).

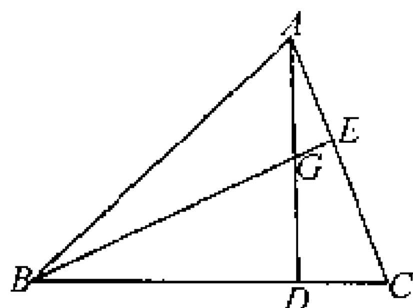
(A)3∶5 (B)2∶5 (C)2∶3 (D)3∶2



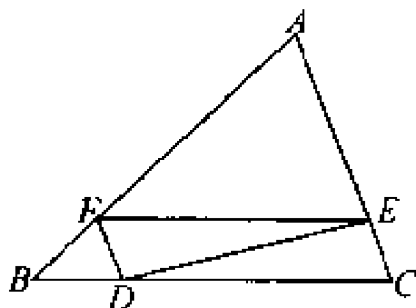
(第2题)

二、填空题

3. 如图，$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，$BD:DC = 3:1$，G 为 AD 的中点，BG 的延长线交 AC 于 E，则 $BG:GE =$ ________.



(第3题)

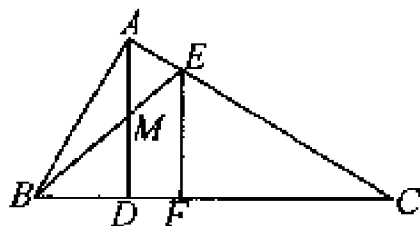


(第4题)

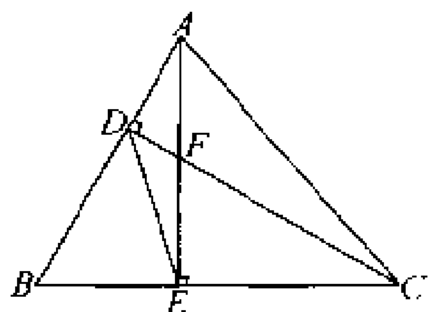
4. 如图，$\triangle ABC$ 中，$BD:BC = CE:CA = BF:AB = 1:3$，则 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}$ 的值为________.

5. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AD \perp BC$ 于 D，M 为 AD 的中点，BM 交 AC 于 E. 过 E 作 $EF \perp BC$ 于 F，$AE = 3$，$EC = 12$，则 $EF =$ ________.

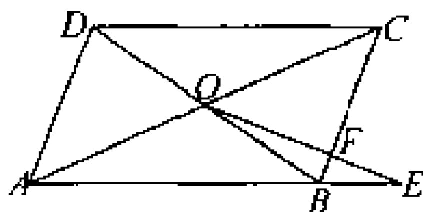
6. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 60°$，$CD \perp AB$，垂足为 D，$AE \perp BC$，垂足为 E，则 $DE:AC =$ ________.



(第5题)



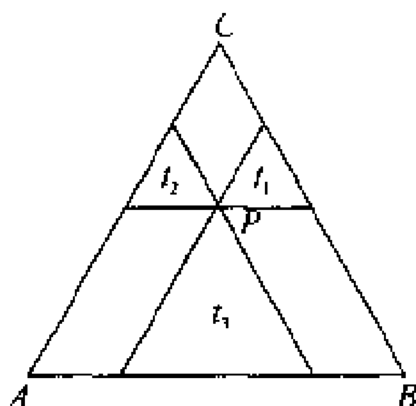
（第 6 题）



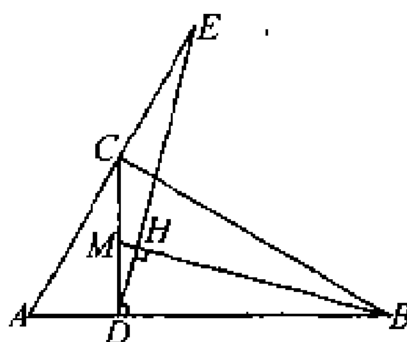
（第 7 题）

7. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 O 点，E 是 AB 延长线的一点，OE 交 BC 于 F，又 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，则 BF 的长为______.

8. 如图，P 是△ABC 内一点，过 P 分别作直线平行于△ABC 的各边，得到的小三角形 t_1、t_2、t_3 的面积分别为 4，9 和 49，则△ABC 的面积为______



（第 8 题）



（第 9 题）

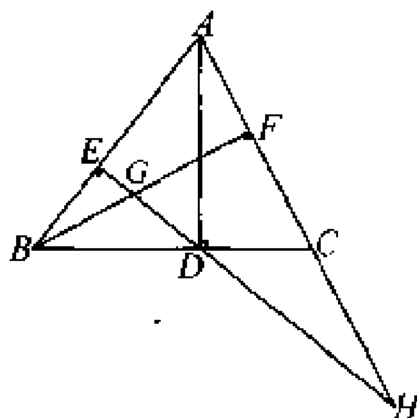
三、解答题

9. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，M 是 CD 上的点，$DH\perp BM$，交 BM 于 H，交 AC 的延长线于 E. 求证：

(1) △AED∽△CBM；

(2) $AE\cdot CM=AC\cdot CD$.

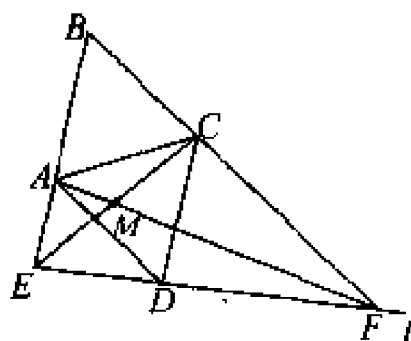
10. 如图，△ABC 中，AD、BF 分别为 BC、AC 边上的高，过 D 作 AB 的垂线交 AB 于 E，交 BF 于 G，交 AC 的延长线于 H.



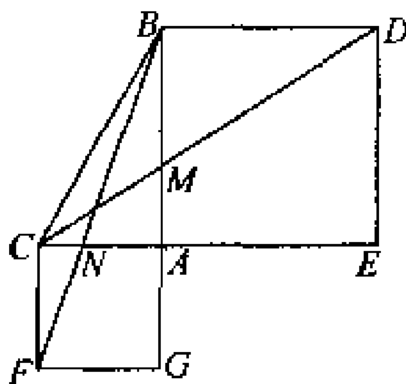
（第 10 题）

求证：$DE^2 = EG \cdot EH$.

11. 如图，四边形 $ABCD$ 各边相等，且$\angle ABC$ 为 $60°$. 直线 l 过 D 点，但与四边形 $ABCD$ 不相交（D 点除外）. l 与 BA、BC 的延长线分别交于 E、F，M 是 CE 与 AF 的交点. 求证：$CA^2 = CM \cdot CE$.



（第 11 题）



（第 13 题）

12. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AD \perp BC$ 于 D，$\angle B$ 的平分线分别与 AD、AC 交于 E、F. 若 $AC = \sqrt{2}$，求证：$\dfrac{EF}{CD} < AF \cdot CF$.

13. 如图，以$\triangle ABC$ 的两条边 AB、AC（$AB \neq AC$）为边向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，连结 DC、BF 分别交 AB、AC 于 M、N.

(1)若$\angle BAC = 90°$，求证：$AM = AN$；

(2)若 $AM = AN$，求证：$\angle BAC = 90°$.

第二十三讲　平移、对称、旋转

知 识 点 和 方 法 述 要

1.几何变换是把一个几何图形 F_1 变换为另一个几何图形 F_2 的方法．平移、对称、旋转是三种常见的几何变换．解题中适当地采用平移、对称、旋转等变换可把某些几何图形"变换"到所需要的位置，变为所需要的图形，使题设条件相对集中，以利于运用．

2.平移变换是把图形 F_1 上所有的点按某个方向移动一定距离，形成图形 F_2 的几何变换，平移变换前后的对应线段平行且相等，对应角的两边分别平行且方向一致．

3.(1)(ⅰ)关于某条直线对称的两个图形是全等形．

(ⅱ)如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线．

(ⅲ)两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上．

(ⅳ)如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称．

(ⅴ)如果一个图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这直线就是它的对称轴．如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形就是关于这条轴对称的．

(2)如果图形 F_1 与 F_2 关于直线 l 对称，则按这种方式把 F_1 变为 F_2 的变换，称为对称变换，又称反射变换．直线 l 称为对称轴或反射轴.

4.(1)将平面图形 F_1 绕平面内一定点 O 按一定方向旋转一个定角 α 得到图形 F_2，这样的变换称为旋转变换，O 点叫做旋转中心，

α 叫做旋转角．

(2)旋转角为 180°的旋转变换称为中心对称变换，旋转中心又称为对称中心．

(3)(ⅰ)如果图形 F_1 经中心对称变换后与图形 F_2 重合，那么称这两个图形关于点(对称中心)中心对称．

(ⅱ)关于中心对称的两个图形全等．

(ⅲ)关于中心对称的两个图形，对称点连线都经过对称中心，并且被对称中心平分．

(ⅳ)如果两个图形的对称点连线都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这一点中心对称．

(ⅴ)如果一个图形经中心变换后与原图形重合，则称这个图形为中心对称图形．

中心对称是对两个图形而言，它表示两个图形间的对称关系．中心对称图形是对一个图形而言，它表示某个图形的特性．

例 题 精 讲

例 1 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，M 为 AB 上一点，使 $AM=BC$，N 为 BC 上一点，使得 $CN=BM$，连结 AN、CM 交于 P 点，求证：$\angle APM=45°$．

证一 如图 23－1，过 C 作 $CD\parallel AB$，且 $CD=AM$，连结 AD、DN，则四边形 $AMCD$ 为平行四边形，有 $AD \overset{\parallel}{=} CM$．

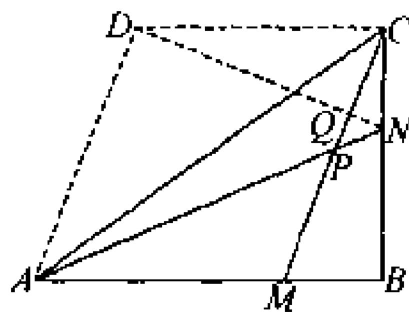


图 23－1

因 $AM=BC$，故 $DC=BC$．又 $\angle DCN=\angle B=90°$，$CN=BM$，故 $\text{Rt}\triangle DCN\cong \text{Rt}\triangle CBM$，可知 $DN=CM$．进而知 $DN=AD$，且

$\angle ADN=\angle MQN=\angle MCB+\angle QNC=\angle MCB+\angle CMB=90°$，故 $\triangle ADN$ 是等腰直角三角形，$\angle DAN=45°$．于是 $\angle APM=\angle DAN=$

$45°$.

证二 如图 23－2，过 M 作 $ME \parallel CN$，且 $ME = CN$，连结 AE、NE，则四边形 $MENC$ 为平行四边形，有 $MC \mathrel{\underline{\parallel}} EN$。又 $CN = MB$，故 $ME = BM$。由 $\angle B = 90°$，知 $\angle AME = \angle B = 90°$，又 $AM = CB$，故 $Rt\triangle AME \cong Rt\triangle CBM$，可知 $AE = MC = EN$，$\angle AEM = \angle CMB$。所以，有

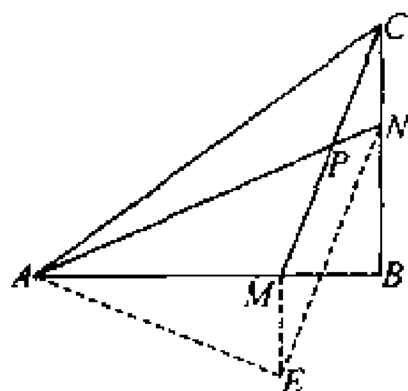


图 23－2

$$\angle AEN = \angle AEM + \angle MEN = \angle CMB + \angle MCB = 90°,$$

$\triangle AEN$ 为等腰直角三角形，$\angle ANE = 45°$。于是，$\angle APM = \angle ANE = 45°$.

证三 如图 23－3，过 A 作 $AR \parallel BC$，且 $AR = NC$。连结 RM、BC，则四边形 $ANCR$ 为平行四边形，有 $AN \parallel RC$，又 $CN = BM$，故 $AR = BM$。因 $AM = BC$，$\angle RAM = \angle B = 90°$，所以 $Rt\triangle RAM \cong Rt\triangle MBC$，可知 $RM = MC$，$\angle AMR = \angle MCB$，且

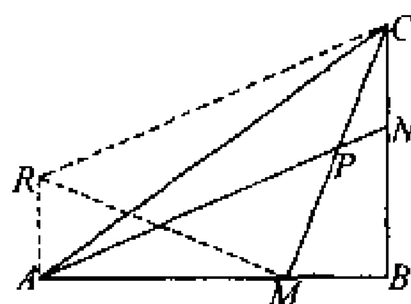


图 23－3

$$\angle RMA + \angle BMC = \angle MCB + \angle BMC = 90°.$$

所以 $\angle RMC = 90°$，$\triangle RMC$ 为等腰直角三角形，可得 $\angle MCR = 45°$。于是 $\angle APM = \angle RCM = 45°$.

注 构作平行四边形是平移变换的主要方式。如证一中构作 $\square MCDA$，将 CM 平移至 AD 处，证二中构作 $\square NCME$，将 CN 平移至 ME 处，证三中构作 $\square NCAR$，将 NC 平移至 AR.

例 2 试证：四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 的中点连线段 EF 不超过另一对边 AD、BC 和的一半.

证明 （ⅰ）如果 $AD \parallel BC$，则四边形 $ABCD$ 为梯形或平行四边

形，EF 为梯形的中位线或直接有 $EF = AD = BC$. 二者均有 $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

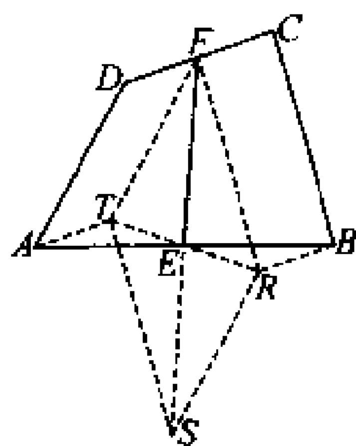


图 23－4

(ⅱ)如果 AD 与 BC 不平行，如图 23－4，作平移变换：将 DA 移至 FT，CB 移至 FR. 四边形 $FDAT$、$CFRB$ 均为平行四边形. 连结 TE、RE，因 $AT \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DF$，$BR \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} FC$，$F$ 为 CD 中点，故 $AT \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} RB$，四边形 $ARBT$ 为平行四边形，TR 与 AB 交于 AB 中点 E，所以 T、E、R 三点在同一直线上，且 $TE = ER$. 延长 FE 至 S，使 $FE = ES$，连结 TS、RS，四边形 $FTSR$ 为平行四边形，有 $TS = FR$. 于是

$$EF = \frac{1}{2}FS < \frac{1}{2}(TE + TS) = \frac{1}{2}(TF + FR) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

例 3 凸六边形 $ABCDEF$ 中，$AB /\!/ DE$，$BC /\!/ EF$，$CD /\!/ FA$，又 $AB - DE = EF - BC = CD - FA (>0)$. 求证：六边形 $ABCDEF$ 的各内角都相等.

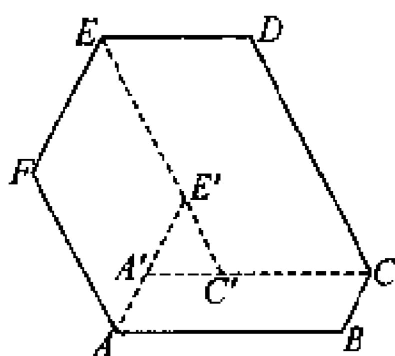


图 23－5

证明 如图 23－5，将 AB 平移到 $A'C$，有 $A'C /\!/ DE$. 再将 CD 平移到 EC'，此时有 $EC' /\!/ FA$，且 C' 在 $A'C$ 上. 过 A、A' 作线段 AE' 交 EC' 于 E'. 由 $AA' /\!/ BC$，有 $AE' /\!/ EF$. 故 $A'C' = AB - DE$，$E'A' = EF - BC$，$C'E' = CD - FA$. 由题设知，$AB - DE = EF - BC = CD - FA$，从而 $A'C' = E'A' = C'E'$，$\triangle A'C'E'$ 是等边三角形，三内角均为 $60°$. 于是 $\angle AE'E = \angle EC'C = \angle CA'A = 120°$，$\angle AFE = \angle EDC = \angle CBA = 120°$，从而 $\angle BCD = \angle FAB = \angle DEF = 120°$，即六边形各内角相等.

例 4 如图 23－6，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 80°$，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，$\angle PBC = 10°$，$\angle PCB = 30°$，求 $\angle BAP$ 的大小.

分析 等腰三角形是轴对称图形，作 $\angle BAC$ 的平分线(即 $\triangle BAC$

的对称轴)，与 CP 的延长线交于点 D. 连 BD，则 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，且易知 $\triangle ABD \cong \triangle PBD$，从而有 $AB = PB$. 于是，$\angle BPA = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$.

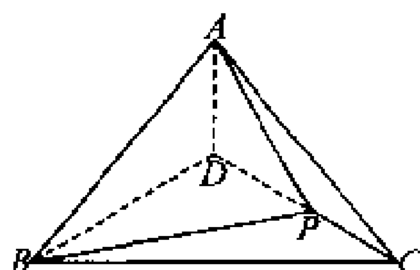


图 23 - 6

例 5 已知 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$AD = AB$，$CM \perp AD$ 于 M，求证 $AM = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

证一 如图 23 - 7，以 AD 为轴作 $\triangle ABD$ 的对称图形——$\triangle AED$，则有 $AE = AB = AD$，$\angle B = \angle ADB = \angle ADE = \angle AED$. 依题设，$\angle BAD = \angle CAD$，故 AE 与 AC 共线.

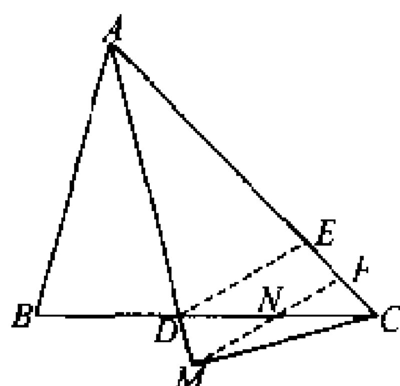


图 23 - 7

取 DC 的中点 N，连结 MN 并延长交 AC 于点 F，则在 $\mathrm{Rt}\triangle DMC$ 中，$DN = MN = CN$，所以 $\angle NMD = \angle NDM = \angle ADB = \angle ADE$，即 $MF \parallel DE$. 故有 $DM = EF = FC$. 所以

$$AM = AD + DM = \frac{1}{2}(AB + AE) + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}(AB + AC).$$

证二 如图 23 - 8，以 CM 为轴作 $\triangle ACM$ 的对称 $\triangle FCM$，则 $\triangle FCM \cong \triangle ACM$，有 $\angle F = \angle CAM$，$FC = AC$，$\angle CAM = \angle BAD$，故 $\angle F = \angle BAD$，$FC \parallel AB$. 有 $\angle FCD = \angle B = \angle ADB = \angle FDC$，从而 $FC = FD$. 于是

$$\begin{aligned} AM &= \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(AD + FD) \\ &= \frac{1}{2}(AB + FC) \\ &= \frac{1}{2}(AB + AC). \end{aligned}$$

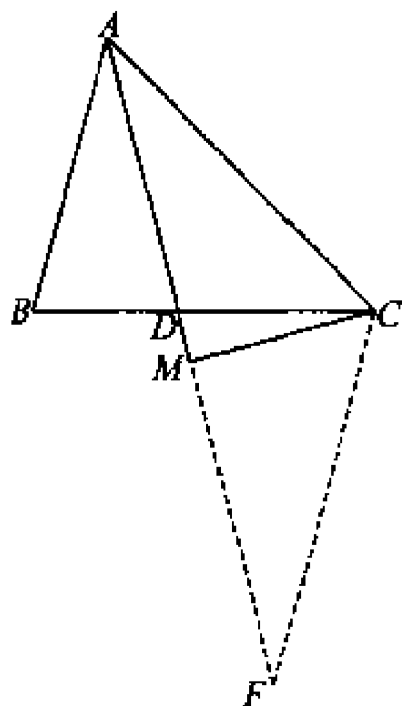


图 23 - 8

例 6 如图 23 - 9，$\angle MON = 20°$，A 为 OM 上一点，$OA = 4\sqrt{3}$，D 为 ON 上一点，$OD =$

$8\sqrt{3}$，C 是 AM 上任意一点，B 是 OD 上任意一点，求证：$AB+BC+CD\geqslant 12$.

分析 通过对称变换，设法把折线化"直"，以便利用两点间直线段距离最短导致结论.

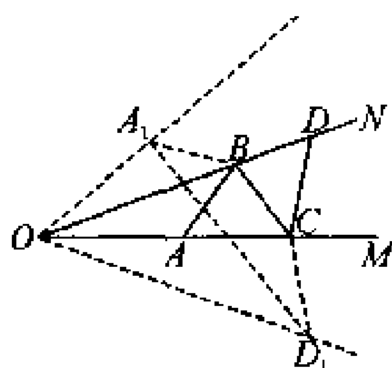


图 23-9

以 OM 为对称轴，作 D 点关于 OM 的对称点 D_1，再作射线 OD_1，则 $\angle MOD_1=20°$. 同样，作点 A 关于 OD 的对称点 A_1，作射线 OA_1，$\angle DOA_1=20°$. 于是 $\angle A_1OD_1=60°$. 连结 A_1D_1、A_1B、CD_1，则 $A_1B=AB$，$CD_1=CD$. 因此，

$$AB+BC+CD=A_1B+BC+CD_1\geqslant A_1D.$$

在 $\triangle A_1OD_1$ 中，$OA_1=OA=4\sqrt{3}$，$OD_1=OD=8\sqrt{3}$，有 $OA_1=\frac{1}{2}OD_1$，又 $\angle A_1OD_1=60°$，故 $\angle OA_1D_1=90°$，根据勾股定理，可得

$$A_1D_1=\sqrt{OD_1^2-OA_1^2}=\sqrt{(8\sqrt{2})^3-(4\sqrt{3})^2}=12. \qquad ②$$

由①，②知 $AB+BC+CD\geqslant 12$.

例7 已知：如图 23-10，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\angle DAE=45°$，$BD=2$，$CE=3$. 求 DE 的长.

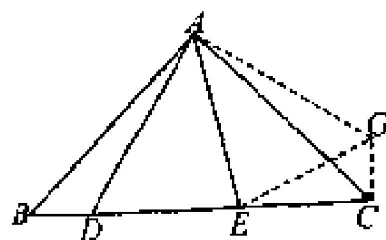


图 23-10

解 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$，则 AB 至 AC 处，点 D 至点 G 处，$AG=AD$，$CG=BD$. 因 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ACG=\angle B=45°$，$\angle ACB=45°$，故 $\angle ECG=90°$，又 $\angle DAG=90°$，$\angle DAE=45°$，故 $\angle EAG=\angle DAE=45°$. 于是 $\triangle AEG\cong\triangle AED$，有 $EG=DE$.

因 $CG=BD=2$，$CE=3$，根据勾股定理可得

$$GE=\sqrt{CE^2+CG^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},$$

故 $DE=\sqrt{13}$.

例8 如图 23-11，以 $\triangle ABC$ 各边为底边，向外侧作顶角为 $120°$

的等腰三角形，它们是$\triangle ABD$、$\triangle BCF$、$\triangle AEC$.求证：$\triangle DEF$为等边三角形.

分析 直接利用题设中图形证明$\triangle DEF$为等边三角形有困难.注意到$\angle ADB=\angle BFC=\angle CEA=120°$，凸六边形$ADBFCE$的内角和为$720°$，故其余三个相间内角的和，即$\angle DAE+\angle DBF+\angle FCE=360°$，而采用旋转$120°$的方法可将$\triangle EAD$、$\triangle FBD$与$\triangle FCE$拼成有公共顶点的图形，并转而证明图23－11中的$\triangle EFG$为等边三角形.

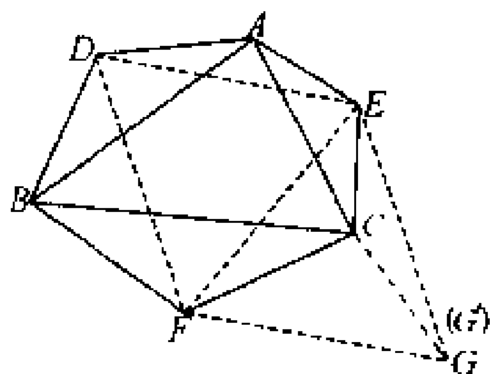


图23－11

证明 以E为旋转中心，将$\triangle EAD$逆时针旋转$120°$，EA至EC处，D至G处，再以F为中心，将$\triangle FBD$顺时针旋转$120°$，FB至FC处，D至G'处，因$\angle ECG+\angle FCE+\angle G'CF=360°$，所以$G$与$G'$重合.

由于$DE=EG$，$DF=FG$，EF公共，所以$\triangle EDF\cong\triangle EGF$.又$\angle DEG=\angle AEC=120°$，故$\angle DEF=\angle GEF=60°$.同理$\angle DFE=\angle GFE=60°$.故$\triangle DEF$为等边三角形.

例9 已知三直线l、m、n互相平行，A是l上一点，求作$\triangle ABC$，使B在直线m上，C在直线n上，且使$\triangle ABC$为一等边三角形.

分析 如图23－12，设$\triangle ABC$已经作出.作$AD\perp m$，则AD的长等于l与m的距离，试将$\triangle ADB$旋转到$\triangle AEC$的位置，易知$\angle DAE=60°$，则E点可以作出，从而C点可以作出.

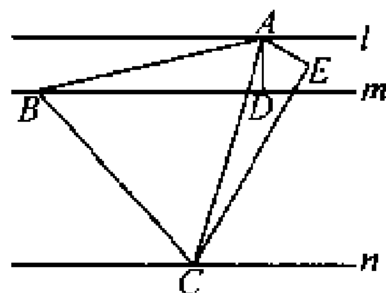


图23－12

作法 (1)作$AD\perp m$，垂足为D；

(2)作$\angle DAE=60°$，在AE上截取$AE=AD$；

(3)过 E 作 $EC\perp AE$，EC 交直线 n 于 C，连结 AC；

(4)以 A 为圆心、AC 为半径画弧，交 m 于 B，连结 AB、BC，$\triangle ABC$ 即为所求所的三角形.

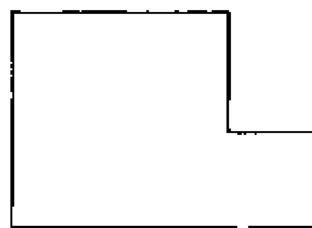
证明 在 $Rt\triangle AEC$ 与 $Rt\triangle ADB$ 中，$AE=AD$，$AC=AB$，故有 $Rt\triangle AEC\cong Rt\triangle ADB$. 从而 $\angle EAC=\angle DAB$. 于是

$$\angle EAC-\angle DAC=\angle DAB-\angle DAC,$$

即 $\angle DAE=\angle CAB$. 但是 $\angle DAE=60°$，故 $\angle CAB=60°$. 从而 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

练 习 二 十 三

1. 如图，一块方角形钢板，试用一条直线将其分为面积相等的两部分.



(第1题)

2. 两人轮流在一张长方形桌面上摆放硬币，规则是每人每次摆一个，硬币不能互相重叠，也不能有一部分在桌面边缘之外，摆好后不许移动，这样经过多次摆放，直到谁最先摆不下硬币谁就认输. 按照这个规则，你用什么办法能够取胜？

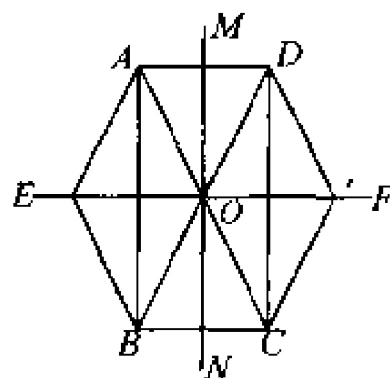
3. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle B=40°$，延长 BC 至 D，使 $CD=AB$，求 $\angle ADB$ 的度数.

4. 如图，AC 和 BD 都关于 O 成中心对称，A、D 与 E、F 都关于 MN 成轴对称. 求证：

(1)四边形 $ABCD$ 是矩形；

(2)$\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 既关于 MN 成轴对称，又关于 O 成中心对称；

(3)$\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 是全等的等腰三角形.

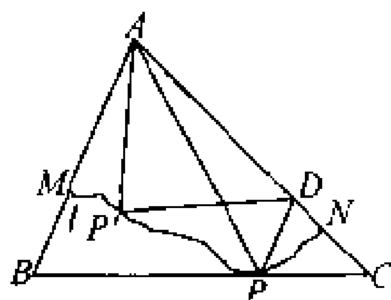


(第4题)

5. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，P 为 $\triangle ABC$ 内一

点，$\angle APB > \angle APC$，求证：$PC > PB$.

6. 如图，$\triangle ABC$ 中有一条曲线 l，l 上有三点 M、P、N，分别在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 上，D 是 AC 上一定点，P' 是曲线 l 上与 P 不同的任一点．若 $AP' + P'D > AP + PD$，求证：$\angle APB = \angle DPC$.



（第 6 题）

7. 已知等边 $\triangle ABC$，E 为 AC 边延长线上一点，以 CE 为边作正 $\triangle CDE$，B、D 位于直线 AE 同侧，点 M、N 分别为 AD、BE 中点，求证：$\triangle CMN$ 为等边三角形.

8. 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A = 90°$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$PA = 1$，$PB = 3$，$PC = \sqrt{7}$，求 $\angle CPA$ 的大小.

9. 凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O，且 $AC \perp BD$，已知 $OA > OC$，$OB > OD$，求证：$BC + AD > AB + CD$.

10. 已知等边的凸六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$，求证：$\angle A = \angle D$.

11. 有一张矩形纸片 $ABCD$，$AD = 9$，$AB = 12$，将纸片折叠使 A、C 两顶点重合，求折痕的长.

12. A、B 为直线 MN 外的两点，且 A、B 到 MN 的距离不相等．试在 MN 上找一点 P，使得 $|PA - PB|$ 最大.

13. 证明：三角形中，如果有两个内角的平分线相等，那么这两个角的对边相等.

练 习 解 答

练习一

1.**解** (1)原式 $=(2x)^6-y^6=[(2x)^3-y^3][(2x)^3+y^3]=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$.

(2)原式 $=m^3[(\frac{1}{2}m)^3-(\frac{1}{9}n)^3]=m^3(\frac{1}{2}m-\frac{1}{9}n)(\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{18}mn+\frac{1}{81}n^2)$.

(3)原式 $=a^2x^2(a^2+8ax+16x^2)=a^2x^2(a+4x)^2$.

(4)原式 $=a^{n-3}(1+a^3)=a^{n-3}(1+a)(1-a+a^2)$.

(5)原式 $=4a[4x^2y^2-(x^2+y^2)^2]$

$=-4a(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^3+2xy)$

$=-4a(x-y)^2(x+y)^2$.

2.**解** (1)原式 $=(4x^2+4x+1)-4y^3=(2x+1)^2-(2y)^2$

$=(2x+2y+1)(2x-2y+1)$.

(2)原式 $=(x^2-4z^2)-(xy-2yz)$

$=(x-2z)(x+2z)-y(x-2z)$

$=(x-2z)(x-y+2z)$.

(3)原式 $=5a^2mn(p^2-m^2+2mn-n^2)$

$=5a^2mn[p^2-(m-n)^2]$

$=5a^2mn(p-m+n)(p+m-n)$.

3.**解** (1)原式 $=(x^4+2x^2+1)-9x^2=(x^2+1)^2-(3x)^2$

$=(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)$.

(2)原式 $=(4x^4+4x^2+1)-4x^2$

$=(2x^2+1)^2-(2x)^2$

$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$.

(3)原式 $=(a^3-1)+6(a-1)=(a-1)(a^2+a+7)$.

4.**解** (1) 原式 $=(a^2c^2+2ac\cdot bd+b^2d^2)+(b^2c^2-2bc\cdot ad+a^2d^2)$

$=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$

$= c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)$

$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

(2)原式 $= x^2y^2-x^2-y^2+1-4xy$

$= (x^2y^2-2xy+1)-(x^2+y^2+2xy)$

$= (xy-1)^2-(x+y)^2$

$= (xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$.

(3)原式 $= x^2+1+2x+x^2+(x+x^2)^2$

$= 1+2(x+x^2)+(x+x^2)^2$

$= (1+x+x^2)^2$.

(4)原式 $= (1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$= [(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$= [(1+y)+x^2(1-y)+2x][(1+y)+x^2(1-y)-2x]$

$= (x^2-x^2y+y+1+2x)(x^2-x^2y+1+y-2x)$

$= [(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$= (x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$.

练习二

1.解 (1)令 $y=x^2+x-1$,则

原式 $= y^2+y-2$

$= (y+2)(y-1)$

$= (x^2+x+1)(x^2+x-2)$

$= (x^2+x+1)(x-1)(x+2)$.

(2)令 $u=x+y, v=xy$,则

原式 $= (u^2-2v)(u^2-3v)-2v^2$

$= u^4-5vu^2+6v^2-2v^2$

$= u^4-5vu^2+4v^2$

$= (u^2-v)(u^2-4v)$

$= [(x+y)^2-xy][(x+y)^2-4xy]$

$= (x^2+y^2+xy)(x-y)^2$.

(3)令 $t=x-y$,则

原式 $= t^3-(t+2)^3+8$

$=(t^3+8)-(t+2)^3$

$=(t+2)(t^2-2t+4)-(t+2)^3$

$=(t+2)[(t^2-2t+4)-(t^2+4t+4)]$

$=(t+2)\cdot(-6t)$

$=-6t(t+2)$

$=-6(x-y)(x-y+2)$.

(4)原式 $=\frac{1}{12}(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)-6$.

令 $m=6x+7$,则

原式 $=\frac{1}{12}m^2(m+1)(m-1)-6$

$=\frac{1}{12}m^2(m^2-1)-6$

$=\frac{1}{12}(m^4-m^2-72)$

$=\frac{1}{12}(m^2-9)(m^2+8)$

$=\frac{1}{12}[(6x+7)^2-9][(6x+7)^2+8]$

$=\frac{1}{12}(6x+10)(6x+4)(36x^2+84x+57)$

$=(3x+5)(3x+2)(12x^2+28x+19)$.

(5)原式 $=(x-6)(x-9)(x+4)(x+7)+350$

$=[(x-6)(x+4)][(x-9)(x+7)]+350$

$=(x^2-2x-24)(x^2-2x-63)+350$.

令 $t=x^2-2x-24$,则

原式 $=t(t-39)+350$

$=t^2-39t+350$

$=(t-25)(t-14)$

$=(x^2-2x-49)(x^2-2x-38)$.

(6)令 $y=x^2+5x+6$,则

原式 $=(y-x)(y+x)-3x^2$

$=y^2-x^2-3x^2$

$=y^2-4x^2$

$=(y+2x)(y-2x)$

$=(x^2+7x+6)(x^2+3x+6)$

$=(x+1)(x+6)(x^2+3x+6)$.

(7)令 $m=x^2-x, n=x^2+3x+2$,则

原式 $=m^2+n^2-(m+n)^2$

$=-2mn$

$=-2x(x-1)(x+1)(x+2)$.

(8)令 $t=a+b+c$,则

原式 $=(t-c)(t-a)(t-b)+abc$

$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc+abc$

$=t^3-t^3+(ab+bc+ca)t$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

2.**解** (1)因 $6x^2+7xy+2y^2=(2x+y)(3x+2y)$,

故可设

原式 $=(2x+y+m)(3x+2y+n)$

$=6x^2+7xy+2y^2+(3m+2n)x+(2m+n)y+mn$.

比较对应项系数,得

$$\begin{cases}3m+2n=-8, & ①\\ 2m+n=-5, & ②\\ mn=2. & ③\end{cases}$$

由①,②解得 $m=-2, n=-1$,代入③式,③式成立.

故　　原式 $=(2x+y-2)(3x+2y-1)$.

(2) 猜想:原式 $=(x^2+mx+1)(x^2+nx+5)$.

$=x^4+(m+n)x^3+(mn+6)x^2+(5m+n)x+5$

比较对应项系数得

$$\begin{cases}m+n=-1, & ①\\ mn+6=4, & ②\\ 5m+n=3. & ③\end{cases}$$

由①,③得 $m=1, n=-2$,代入②,②式成立.由于惟一性,可得

原式 $=(x^2+x+1)(x^2-2x+5)$.

3.**证明** 假定 $x^2-2xy+y^2+x+y-4$ 能分解为两个一次因式.因 $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$,故可设

$$x^2-2xy+y^2+x+y-4=(x-y+m)(x-y+n)$$
$$=x^2-2xy+y^2+(m+n)x-(m+n)y+mn.$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases} m+n=1, & ① \\ m+n=-1, & ② \\ mn=-4. & ③ \end{cases}$$

①,②矛盾,故上述方程组无解,命题成立.

4.**解** 设

$$x^2+7xy+ty^2-5x+43y-24$$
$$=(x+my+k)(x+ny+l)$$
$$=x^2+(m+n)xy+mny^2+(k+l)x+(kn+lm)y+kl.$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases} k+l=-5, & ① \\ kl=-24, & ② \\ kn+lm=43, & ③ \\ m+n=7, & ④ \\ mn=t. & ⑤ \end{cases}$$

由①,②可得 $k=3,l=-8$.代入③得

$$3n-8m=43. \quad ⑥$$

由③,④解得 $m=-2,n=9$.代入⑤得

$$t=mn=-18.$$

此时 原式 $=(x-2y+3)(x+9y-8)$.

练习三

1.**解** (1)原式 $=2x^2+(y-4)x-(y^2-5y+6)$

$=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)$

$=(2x-y+2)(x+y-3)$.

(2)原式 $=(x-4y)(x+2y)-(x+14y)-6$

$=(x-4y-3)(x+2y+2)$.

2. 解 (1)原式奇数项的系数和与偶数项的系数和相等，故含有因式 $x+1$. 利用综合除法可得原式 $=(x+1)(2x^2-3x+4)$.

(2)原式是关于 x,y 的齐次多项式. 先考虑分解 $x^3-19x-30$ 的因式. 记 $f(x)=x^3-19x-30$. 因 $f(-2)=f(-3)=f(5)=0$，故 $f(x)=(x+2)(x+3)(x-5)$. 于是原式 $=(x+2y)(x+3y)(x-5y)$.

(3)记 $f(x)=x^3+3px^2+(3p^2-q^2)x+p(p^2-q^2)$. 有

$$\begin{aligned}f(-p)&=(-p)^3+3p(-p)^2+(3p^2-q^2)(-p)+p(p^2-q^2)\\&=-p^3+3p^3-3p^3+pq^2+p^3-pq^2\\&=0.\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 含因式 $x+p$. 拆项分组，进行因式分解：

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^3+3px^2+3p^2x+p^3)-q^2(p+x)\\&=(x+p)^3-q^2(p+x)\\&=(x+p)[(x+p)^2-q^2]\\&=(x+p)(x+p-q)(x+p+q).\end{aligned}$$

3. 解 记 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，且设 $f(x)=(ax-b)g(x)+r$（$g(x)$ 为多项式，r 为常数）. 因 $f(\frac{b}{a})=0$，故 $r=0$，所以 $f(x)=(ax-b)g(x)$. $ax-b$ 为 $f(x)$ 的一个因式.

(2)记 $f(x)=2x^3-7x^2-3x+18$，则

$$\begin{aligned}f(-\frac{3}{2})&=2(-\frac{3}{2})^3-7(-\frac{3}{2})^2-3\times(-\frac{3}{2})+18\\&=-\frac{27}{4}-\frac{63}{4}+\frac{9}{2}+18=0.\end{aligned}$$

故 $2x+3$ 是 $f(x)$ 的一个因式. 进而，有

$$\begin{aligned}f(x)&=2x^3+3x^2-(10x^2+3x-18)\\&=x^2(2x+3)-(2x+3)(5x-6)\\&=(2x+3)(x^2-5x+6)\\&=(2x+3)(x-2)(x-3).\end{aligned}$$

4. 解 (1)当 $a=b$ 时原式为 0，故 $a-b$ 是原式的一个因式. 因原式是关于 a,b,c 轮换对称式，故还含有因式 $b-c,c-a$. 可设

原式 $=k(a-b)(b-c)(c-a)$.

令 $a=1,b=0,c=-1$，得

$$(1-0)^3+(0+1)^3+(-1-1)^3=k(1-0)(0+1)(-1-1),$$

解得 $k=3$. 所以原式 $=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

也可利用例 6 直接得到结果.

(2)令 $y+z-x=m, z+x-y=n, x+y-z=l$, 则

$$原式=(m+n+l)^3-m^3-n^3-l^3. \quad ①$$

当 $m=-n$ 时,原式 $=0$,故原式含有因式 $m+n$. 由于原式是关于 m,n,l 的对称式,故又含有因式 $n+l, l+m$. 可设

$$原式=k(m+n)(n+l)(l+m). \quad ①$$

取 $m=n=l=1$. 由①,②得 $k=3$. 所以

$$\begin{aligned}原式&=3(m+n)(n+l)(l+m)\\&=3\cdot 2z\cdot 2x\cdot 2y\\&=24xyz.\end{aligned}$$

5. **证明** P 与 Q 都是齐次对称式. 当 $x=-y$ 时,

$Q=y^3-y^3+y^2z+yz^2-yz^2+y^2z-2y^2z=0$,

$P=z^{2n+1}-z^{2n+1}=0$.

故 $x+y$ 是 P、Q 的一个公因式. 根据对称性, $y+z, z+x$ 也是 P,Q 的公因式. 因 Q 是三次齐次对称式, $2n+1\geqslant 3$, 故 Q 是 P 的因式.

练习四

1. $(4m+5)^2-9=(4m+5)^2-3^2=8(m+2)(2m-1)$. 选(A).

2. $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$. 因 c,b 均为正数, $b+c\neq c-b$, 而 a 为素数,所以 $c+b=a^2, c-b=1$, 表明 c,b 为相邻的两整数,一奇一偶. 选(C).

3. $2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2=(x+y)^2[2(x^2+y^2)-(x-y)^2]=(x+y)^4$. 故 $x=-y$. 选(C).

4. $998^2-2^2=(998+2)(998-2)=996000$.

5. $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{2000^2})=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdots\frac{1999^2-1}{1999^2}\cdot\frac{2000^2-1}{2000^2}=\frac{1\times 3}{2^2}\cdot\frac{2\times 4}{3^2}\cdot\frac{3\times 5}{4^2}\cdots\frac{1998\times 2000}{1999^2}\cdot\frac{1999\times 2001}{2000^2}=\frac{2001}{4000}$.

6. $x^2-2xy-3y^2+2xz+10yz-8z^2=(x-3y+4z)(x+y-2z)=2-x$.

7. 由 $2^4+m\cdot 2^3+n\cdot 2-16=0$ 及 $1^4+m\cdot 1^3+n\cdot 1-16=0$ 联立得 $m=-5, n$

$=20$. 所以 $mn=-100$.

8. **证明** $3^{n+3}+m=(3^{n+3}-3^n)+(3^n+m)=26\cdot 3^n+3^n+m$. 显见 $3^{n+3}+m$ 能被 13 整除.

9. **解** $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=3\cdot(3^n)^2-3^n\cdot 2^n-2\cdot(2^n)^2=(3\cdot 3^n+2\cdot 2^n)(3^n-2^n)=(3^{n+1}+2^{n+1})(3^n-2^n)$.

当 $n=1$ 时,该数等于 13,为素数;

当 $n>1$ 时,有 $3^n-2^n>1$,该数为合数.

10. **证明** 令 $y=x^2-3x-4$,则

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)+10\\
=&[(x+1)(x-4)][(x+2)(x-5)]+10\\
=&(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)+10\\
=&y(y-6)+10\\
=&(y^2-6y+9)+1\\
=&(y-3)^2+1>0.
\end{aligned}
$$

11. **证明** 因 $p^2-4q-4(m+1)=0$, 故 $4q=p^2-4(m+1)$. 于是

$$
\begin{aligned}
P&=4x^4-4px^3+[p^2-4(m+1)]x^2+2p(m+1)x+(m+1)^2\\
&=4x^4+p^2x^2+(m+1)^2-4px^3-4(m+1)x^2+2p(m+1)x\\
&=(2x^2-px-m-1)^2,
\end{aligned}
$$

即为一个二次三项式的平方.

12. **证明** $(7-x)(3-x)(4-x^2)-100$

$$
\begin{aligned}
&=-[(x-7)(2+x)][(3-x)(2-x)]-100\\
&=-(x^2-5x-14)(x^2-5x+6)-100\\
&=-[(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)+16]\\
&=-(x^2-5x-4)^2\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

所以
$$(7-x)(3-x)(4-x^2)\leqslant 100.$$

练习五

1. 因 $|x|+2>0$, 故 $4x-3<0$, 有 $x<\dfrac{3}{4}$. 选(B).

2. 显然 $a<0$. 不等式两边同乘 $-a$, 有 $a>-1$. 选(B).

3. 原式 $=6-\dfrac{2}{(x+1)^2+1}$. 当 $x=-1$ 时,原式取最小值 4. 选(A).

4. 令 $a-b=x, b-c=y, c-a=z$，则 $x<0, y<0, z>0$，且 $x+y+z=0$. 于是，

$$原式=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
$$=\frac{yz+zx+xy}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2xyz}=-\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}<0.$$

故选(B).

5. $原式=\frac{x^{3n}-1}{x^n-1}-\frac{x^{2n}-1}{x^n+1}=(x^{2n}+x^n+1)-(x^n-1)=x^{2n}+2.$

6. $原式=(\frac{4ab}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a+b})\div(a+b)^2$

$$=[\frac{4ab}{a-b}+(a-b)]\div(a+b)^2$$
$$=\frac{4ab+(a-b)^2}{a-b}\cdot\frac{1}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{(a+b)^2}{a-b}\cdot\frac{1}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{1}{a-b}.$$

7. $原式=\frac{a^2-2a+1}{a^2}\cdot\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{a^2-1}-\frac{8}{a+1}$

$$=\frac{(a-1)^2}{a^2}\cdot\frac{4a}{a^2-1}-\frac{8}{a+1}$$
$$=\frac{4(a-1)}{a(a+1)}-\frac{8}{a+1}$$
$$=\frac{4a-4-4a}{a(a+1)}$$
$$=-\frac{4}{a}.$$

8. $原式=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{b^3(a-b)^2}=\frac{(b-a)^3}{b^3(a-b)^2}=\frac{b-a}{b^3}$

当 $a=1, b=2$ 时，$原式=\frac{2-1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

9. **解** $原式=\frac{x^6(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}-\frac{x^7}{x^8-1}$

$$=\frac{x^6(x-1)}{x^8-1}-\frac{x^7}{x^8-1}$$
$$=-\frac{x^6}{x^8-1}.$$

10. **解** 设 $a=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=a^2-2$. 于是

$$原式=a^2-(a-\frac{1}{1-a})^2\div\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$$
$$=a^2-(\frac{a^2-a+1}{a-1})^2\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$$
$$=a^2-(a^2-a+1)$$
$$=a-1$$
$$=x+\frac{1}{x}-1.$$

11. **解** 因 $$\frac{ax-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{ax-1}{(x-1)(x^2+1)},$$

且它与$\frac{b}{x+m}$，$\frac{cx+5}{x^2+n}$都是既约分式，故 $m=-1$，$n=1$，有

$$\frac{ax-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{b}{x-1}+\frac{cx+5}{x^2+1}$$
$$=\frac{b(x^2+1)+(cx+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$
$$=\frac{(b+c)x^2+(5-c)x+(b-5)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

比较两边对应项系数有

$$\begin{cases}b+c=0,\\5-c=a,\\b-5=-1.\end{cases}$$

解得 $b=4$，$c=-4$，$a=9$. 所以 $a+b+c=9$.

12. **解** 原式 $=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}$

$-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}$

$=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}=0.$

练习六

1. 依题设，$\frac{2m+3}{m-1}=\frac{5}{4}$，可得 $5(m-1)=4(2m+3)$. 化简得 $3m=-17$，故 $m=-\frac{17}{3}$. 经检验，$m=-\frac{17}{3}$满足题设要求.

2. 原方程可变为

$$\frac{1}{x}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2,$$

即 $$\frac{1}{x}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

因 $a\neq b$，故 $x=\frac{a+b}{b-a}$.

3. 原方程可变为

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{k-5}{x(x+1)}=\frac{k-1}{(x-1)(x+1)}.$$

去分母，得 $$(x+1)+(k-5)(x-1)=(k-1)x. \quad ①$$

此时，原方程的增根 $x=1$ 应满足①，代入①式得 $k=3$.

4. 原方程可变为

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+1998}-\frac{1}{x+1999}\right)=1+\frac{1}{x},$$

即 $$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1999}=1+\frac{1}{x}.$$

所以 $\frac{1}{x+1999}=1$，得 $x=-1998$.

5. 解　原方程可变为

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-4}.$$

即 $$\frac{2}{(x+2)(x+4)}=\frac{2}{(x-6)(x-4)}$$

去分母，得 $$(x+2)(x+4)=(x-6)(x-4),$$

化简得 $$16x=16.$$

解得 $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的根.

6. 解　(1)原方程可变为

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{4}{(x+3)(x-1)}=\frac{5}{(x-1)(x+1)}.$$

去分母，得 $$2(x-1)+4(x+1)=5(x+3).$$

解得 $x=13$. 经检验 $x=13$ 是原方程的根.

(2)原方程可变为

$$(x+2)+\frac{x+4}{x^2+5x+13}=(x+2)+\frac{2x+5}{2x^2+7x+20},$$

即 $$\frac{x+4}{x^2+5x+13}=\frac{2x+5}{2x^2+7x+20}. \quad ②$$

因 $x+4,2x+5$ 为零时的 x 值不是原方程的根,故①可变为

$$\frac{x^2+5x+13}{x+4}=\frac{2x^2+7x+20}{2x+5},$$

从而,有
$$(x+1)+\frac{9}{x+4}=(x+1)+\frac{15}{2x+5},$$

所以
$$\frac{9}{x+4}=\frac{15}{2x+5}.$$

可得
$$9(2x+5)=15(x+4).$$

解得 $x=5$. 经检验, $x=5$ 是原方程的根.

7. **解** (1)根据合分比性质,有

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z+1}=\frac{z}{x+y-1}=\frac{x+y+z}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}.$$

于是
$$\begin{cases} 2x-y-z=0, & ① \\ 2y-x-z-1=0, & ② \\ 2z-x-y+1=0. & ③ \end{cases}$$

又
$$x+y+z=\frac{1}{2}, \quad ④$$

①+④得 $3x=\frac{1}{2}$,进而得 $x=\frac{1}{6}$;

②+④得 $3y=\frac{3}{2}$,进而得 $y=\frac{1}{2}$;

③+④得 $3z=-\frac{1}{2}$,进而得 $z=-\frac{1}{6}$.

经检验, $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{6} \end{cases}$ 是原方程组的解.

(2)原方程组可变为

$$\begin{cases} \dfrac{x(y+1)}{x+y+1}=2, \\ \dfrac{x(z+2)}{x+z+2}=3, \\ \dfrac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}=4. \end{cases}$$

显然 $x,y+1,z+2$ 均不为零,于是,有

$$\begin{cases}\dfrac{x+y+1}{x(y+1)}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x+z+2}{x(z+2)}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{y+z+3}{(y+1)(z+2)}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2}, & ①\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{3}, & ②\\ \dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4}, & ③\end{cases}$$

三式相加,得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{13}{24}. \qquad ④$$

④分别减去①,②,③得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{24},\\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{5}{24},\\ \dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{24}.\end{cases}$$

故 $x=\frac{24}{7}, y=\frac{19}{5}, z=22$.经检验 $\begin{cases}x=\frac{24}{7}\\ y=\frac{19}{5}\\ z=22\end{cases}$ 是原方程组的解.

8. **解** 设甲的速度为 $3x$ 千米/时，则乙的速度为 $2x$ 千米/时. 依题设，得

$$1+\frac{120}{3x}+2\frac{1}{3}=\frac{120}{2x}.$$

解得 $x=6$.经检验 $x=6$ 是原方程的解.又 $2x=12, 3x=18$.故甲的速度为 18 千米/时,乙的速度为 12 千米/时.

9.**解** 设人工每分钟译电 x 字,则收报机每分钟译电 $75x$ 个字.所以译电 3000 个字所需时间分别是$\frac{3000}{x}$分钟和$\frac{3000}{75x}$分钟.依题设,得

$$\frac{3000}{x}=\frac{3000}{75x}+2\times60+28.$$

解得 $x=20$. 经检验 $x=20$ 满足题意. 又 $75x=1500$,故人工每分钟译电 20 个字,这台收报机每分钟译电 1500 个字.

10. **解** 不妨设 A、B 间距离为 1. 甲由 A 到 B 需 x 分钟,乙由 B 到 A 需 y 分钟,则甲的速度为 $\frac{1}{x}$,乙的速度为 $\frac{1}{y}$. 依题意,有

$$\begin{cases}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\cdot48=2, & ①\\ \frac{20}{x}+\frac{30}{y}=1. & ②\end{cases}$$

①即
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}. \qquad ③$$

由②,③解得 $\begin{cases}x=60,\\ y=40.\end{cases}$ 经检验 $\begin{cases}x=60\\ y=40\end{cases}$ 满足题意.

答 甲由 A 到 B 需要 60 分钟,乙由 B 到 A 需 40 分钟.

练习七

1. $\frac{x^2+xy}{y^2}=(\frac{x}{y})^2+\frac{x}{y}=3^2+3=12$. 选(A).

2. $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{b}{b+ab}+\frac{a}{a+ab}=\frac{b}{b+1}+\frac{a}{a+1}=N$. 选(B).

3. 因 $a+b+c=0$, 故 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2}=-\frac{1}{2bc}$. 同理 $\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=-\frac{1}{2ca}$, $\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{1}{2ab}$. 三式相加得 $\frac{1}{b^2+c^2-c^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{1}{2bc}-\frac{1}{2ca}-\frac{1}{2ab}=-\frac{a+b+c}{2abc}=0$. 选(C).

4. 根据等比性质,有

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_{100}}{a_1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{a_2+a_3+\cdots+a_{100}+a_1}=1,$$

故 $a_1=a_2=\cdots=a_{100}$. 于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_{99}}=\frac{100}{99}.$$

选(A).

5.若 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$,则$\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1}=\frac{-a_1}{a_1}=-1$;若 $a_1+a_2+a_3+a_4\neq 0$,根据等比性质,有

$$k=\frac{(a_2+a_3+a_4)+(a_1+a_3+a_4)+(a_1+a_2+a_4)+(a_1+a_2+a_3)}{a_1+a_2+a_3+a_4}$$

$$=\frac{3(a_1+a_2+a_3+a_4)}{a_1+a_2+a_3+a_4}=3.$$

选(D).

6.由 $2a^2-5a+2=0$ 得 $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$. 于是

$$\frac{a^3}{a^6+1}=\frac{1}{a^3+\frac{1}{a^3}}=\frac{1}{(a+\frac{1}{a})[(a+\frac{1}{a})^2-3]}=\frac{1}{\frac{5}{2}[(\frac{5}{2})^2-3]}=\frac{8}{65}.$$

7.设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$,则 $x=2k,y=3k,z=4k$. 有

$$\frac{x^2-2y^2+3z^2}{xy+2yz+3zx}=\frac{(2k)^2-2(3k)^2+3(4k)^2}{2k\cdot 3k+2\cdot 3k\cdot 4k+3\cdot 4k\cdot 2k}=\frac{17}{27}.$$

8.由条件等式得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3,\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4,\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=5$,三式相加得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$. 于是

$$\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{1}{6}.$$

9.由条件等式得

$$\frac{a(1+b)+b(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{a+b}{1+a+b},$$

即 $$\frac{(a+b)+2ab}{1+(a+b)+ab}=\frac{a+b}{1+a+b},$$

去分母,化简得 $$2ab(1+a+b)=ab(a+b),$$

因 $ab\neq 0$,所以 $$2(1+a+b)=a+b,$$

得 $a+b=-2$.

10.解　令 $a=x-1,b=y-1,c=z-1$,有 $a+b+c=0$. 进而可知

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0,$$

所以 $$a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab),$$

于是,原式$=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=-\frac{1}{2}$.

11. **解**　依题设,有

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0,$$

即
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$$

可得 $a+b+c=0$ 或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

当 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 时, $\frac{bc+ca+ab}{abc}=0$,所以 $bc+ca+ab=0$.
进而,有

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1+2\times 0=1.$$

得 $a+b+c=\pm 1$.

综上所述, $a+b+c=0$ 或 ± 1.

12. **证明**　令 $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}=k$,则 $k\neq 0$, $x=k(a+2b+c)$, $y=k(a-c)$, $z=k(a-2b+c)$. 于是

$$x+2y+z=k[(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)]=4ak,$$
$$x-z=k[(a+2b+c)-(a-2b+c)]=4bk,$$
$$x-2y+z=k[(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)]=4ck.$$

进而,有
$$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}.$$

13. **解**　$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a^2}{2a^2+b(-a-b)}=\frac{a^2}{2a^2-ab-b^2}=\frac{a^2}{(2a+b)(a-b)}=\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}$.

同理
$$\frac{b^2}{2b^2+ac}=\frac{b^2}{(b-c)(b-a)},$$
$$\frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

三式相加,得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\\&=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=1.\end{aligned}$$

练习八

1. $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{3}-1$ 为无理数. 选(C).

2. 由 $a>0$, $-ab^3\geqslant 0$, 可得 $b^3\leqslant 0$, 即 $b\leqslant 0$. 故 $\sqrt{-ab^3}=|b|\sqrt{-ab}=-b\sqrt{-ab}$. 选(B).

3. 由 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$, $0\cdot\sqrt{3}=0$ 可知命题(1)、(2)、(4)是假命题. 可以证明(3)是真命题. 假设 $a+b=c$, 其中 a, c 是有理数, b 是无理数, 则 $b=c-a$, 而 $c-a$ 为有理数, 导致矛盾. 综上所述. 选(B).

4. 因 $0<a=2-\sqrt{3}<1$, 故 $\frac{a^2-1}{a+1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}=a-1-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=a-1-\frac{|a-1|}{a(a-1)}=a-1-\frac{1-a}{a(a-1)}=a-1+\frac{1}{a}=2-\sqrt{3}-1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=3$. 选(D).

5. $a^2=2000+2\sqrt{1003\times 997}=2000+2\sqrt{(1000+3)(1000-3)}$, $b^2=2000+2\sqrt{1001\times 999}=2000+2\sqrt{(1000+1)(1000-1)}$, $c^2=4000$. 故 $c^2>b^2>a^2$. 且 a, b, $c>0$, 进而, 有 $c>b>a$. 选(D).

6. 原式 $=[(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2][(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2]$

$$=(6+2\sqrt{15})(-6+2\sqrt{15})=4(15-3^2)=24.$$

7. 因 $0<x<1$, 故

原式 $=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=|x+\frac{1}{x}|-|x-\frac{1}{x}|=x+\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-x)=2x$.

8. 由 $x=\frac{1+\sqrt{994}}{2}$ 得 $(2x-1)^2=1994$, 即 $4x^2-4x-1993=0$. 又

$$4x^3-1997x-1994=(4x^2-4x-1993)x+(4x^2-4x-1993)-1$$

故　原式 $=(-1)^{2001}=-1$.

9. $x+y=1$, $x-y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 于是

$(\frac{x^2-y^2}{2})^2+xy=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{4}+xy=\frac{1^2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{4}+\frac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{4}=\frac{1}{4}$.

10. 两根式同次，故 $3x+y=y+6$，从而 $x=2$. 因 y 是偶数，且 $y+6\geqslant 2, 2x-y=4-y\geqslant 0$，所以 $-4\leqslant y\leqslant 4$.

若 $y=-4,-2,0,4$ 时，两根式并不都是最简根式. 当 $y=2$ 时，两根式分别为 $\sqrt[8]{2}$ 与 $\sqrt[8]{8}$，都是最简根式，故 $y=2$.

11. **解**
$$\begin{cases} x^2+\sqrt{2}y=\sqrt{3}, & ① \\ y^2+\sqrt{2}x=\sqrt{3}. & ② \end{cases}$$

①－②得
$$(x-y)(x+y-\sqrt{2})=0. \quad ③$$

因 $x\neq y$，所以 $x-y\neq 0$，由③得
$$x+y=\sqrt{2}. \quad ④$$

①＋②得
$$x^2+y^2+\sqrt{2}(x+y)=2\sqrt{3}. \quad ⑤$$

④代入⑤得
$$x^2+y^2=2(\sqrt{3}-1). \quad ⑥$$

由④，⑥得
$$xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\frac{1}{2}[(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{3}-1)]=2-\sqrt{3}.$$

所以 $\quad \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}+1).$

12. **解** $\quad \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}\div\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}=\dfrac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}=\dfrac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1.$

故
$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}.$$

13. **证明** (1)依题设，c,d 不能同时为零.

若 $c=0, d\neq 0$，由 $bc=ad$ 得 $a=0$. 所以
$$s=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b}{d}$$
为有理数.

若 $c\neq 0, d=0$. 同样可得 $s=\dfrac{a}{c}$ 为有理数.

若 $c\neq 0, d\neq 0$，由 $bc=ad$ 得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$. 令 $k=\dfrac{a}{c}$，则 $a=ck, b=dk$，有
$$s=\frac{ckx+dk}{cx+d}=k$$

为有理数.

(2)假设 s 是有理数,则

$$scx + sd = ax + b,$$

故
$$(b - sd) + (a - sc)x = 0.$$

由于 $b - sd, a - sc$ 为有理数, x 为无理数,故

$$\begin{cases} b - sd = 0, & ① \\ a - sc = 0. & ② \end{cases}$$

①×c－②×d 得

$$bc - ad = 0,$$

即 $bc = ad$,与题设条件相矛盾,故 s 是无理数.

14. **证明**
$$\sqrt{2} - \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}b - a}{b},$$

$$\sqrt{2} - \frac{a + 2b}{a + b} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(a - \sqrt{2}b)}{a + b}$$

于是

$$\left(\sqrt{2} - \frac{a}{b}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{a + 2b}{a + b}\right) = -\frac{(\sqrt{2} - 1)(a - \sqrt{2}b)^2}{b(a + b)} < 0.$$

故$\sqrt{2}$介于$\frac{a}{b}$与$\frac{a + 2b}{a + b}$之间.

练习九

1. 依题设,有$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$,于是 $x = 2, y = 1$.所以,

$$\frac{\sqrt{x} + y}{\sqrt{3y - 2\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

选(C).

2. 依题设,有

$$\begin{cases} a - b - 2\sqrt{3} = 0, & ① \\ a + b - 2\sqrt{2} = 0. & ② \end{cases}$$

①＋②得 $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, ③

②－①得 $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$. ④

由③,④得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6} - 5.$

选(D).

3. $y=\sqrt{3^2+2\cdot 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$. 由 $4<3+\sqrt{2}<5$ 得 $x=(3+\sqrt{2})-4=\sqrt{2}-1$. 于是

$$x^2+2y=(\sqrt{2}-1)^2+2(3+\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}=9.$$

选(C).

4. $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=\sqrt{2}$, 可得 $a=\sqrt{2}-1$. 同理 $b=\sqrt{6}-2$. 于是

$$\frac{2}{b}-\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{6}+2-(\sqrt{2}+1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}+1.$$

选(A).

5. 依题设, 得

$$a^2-2\sqrt{8}=m+n-2\sqrt{mn}.$$

因 a,m,n 为正整数, 故 $m+n=a^2, mn=8$. 显然 $m\geqslant n$, 故 $m=4, n=2$. 或 $m=8, n=1$. 若 $m=4, n=2$, 则 $a^2=6$, 这不可能. 若 $m=8, n=1$, 则 $a^2=9$, $a=3$. 选(A).

6. 原式 $=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}+1.$

7. 原式 $=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}})}{(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})^3+(\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3}=\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{2}+1.$

8. 依题设, 有 $\frac{2u-v}{4u+3v}\geqslant 0, \frac{v-2u}{4u+3v}\geqslant 0$, 于是 $\frac{2u-v}{4u+3v}=0$, 即 $v=2u$. 进而有 $v=\frac{3}{2}, u=\frac{3}{4}$. 于是

$$u^2-uv+v^2=u^2-2u^2+4u^2=3u^2=\frac{27}{16}.$$

9. **解** 原式 $=(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}})^2(x+\frac{1}{y}-2\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}})$

$=(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{y}})^2$

$$=(x-\frac{1}{y})^2.$$

当 $x=\sqrt{7}+\sqrt{5}, y=\sqrt{3}+1$ 时,

原式 $=(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\frac{4}{\sqrt{5}+1})^2=[\sqrt{7}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)]^2=(\sqrt{7}+1)^2=8+2\sqrt{7}.$

10. **解** $x=\sqrt{16-8\sqrt{3}+3}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$. 进而得 $(4-x)^2=(\sqrt{3})^2$, 即 $x^2-8x+13=0$. 于是

原式 $=\frac{(x^2-8x+13)(x^2+2x+1)+10}{(x^2-8x+13)+2}=\frac{10}{2}=5.$

11. **解** 依题设,有

$$x=a-2+\frac{1}{a},$$

即 $a+\frac{1}{a}=x+2$. 又 $\sqrt{x}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, 故 $a\geqslant1, a-\frac{1}{a}\geqslant0$. 于是

$\sqrt{4x+x^2}=\sqrt{(x+2)^2-4}=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}=a-\frac{1}{a}.$

所有,有

原式 $=\frac{(a+\frac{1}{a})+(a-\frac{1}{a})}{(a+\frac{1}{a})-(a-\frac{1}{a})}=a^2.$

12. **解** 设 $a=6.3, b=1.7$, 则 $a>b>0$.

原式 $=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})}{\sqrt{(a+b)^2-4ab}}=\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2}}=\frac{a-b}{a-b}=1.$

13. **解** 依题设,有

$$b(2b+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}c^2+\frac{1}{4}=0,$$

即
$$2b^2+\sqrt{2}b+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}c^2=0.$$

所以
$$(\sqrt{2}b+\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}c^2=0.$$

于是 $c=0$. 可得 $\frac{bc}{a}=0$.

练习十

1. 平方数的末位只能是 0,1,4,5,6,9. 因 111,444,555,666,999 均非平方数,且 1111 也不是平方数,而 $1444=38^2$,故 1444 为所求.

2. 含有奇数个正因数的正整数必为平方数. 反之也成立. 100 以内的平方数有 1,4,…,81,共 9 个.

3. 当 $n=1$ 时,$4n^2+5n=9$ 为平方数,当 $n\geqslant 2$ 时,$(2n+1)^2<4n^2+5n<4(n+1)^2=(2n+2)^2$. 故 $n=1$.

4. $4^{27}+4^{1000}+4^x=2^{54}(1+2\cdot 2^{1945}+2^{2x-54})$. 当 $2x-54=2\times 1945$,即 $x=1972$ 时,括号里的式子的值是平方数. 当 $x>1972$ 时,

$$x^{2(x-77)}<1+2\cdot 2^{1945}+2^{2(x-27)}<(2^{x-27}+1)^2,$$

$1+2\cdot 2^{1945}+2^{2(x-27)}$不是平方数. 故 1972 为所求.

5. **解** 设矩形两边长分别为 x,y,依题设,四位数为

$$N=1000x+100x+10y+y=11[99x+(x+y)].$$

因 N 为平方数,故 $11\mid x+y$. 注意到 $1\leqslant x,y\leqslant 9$,有 $2\leqslant x+y\leqslant 18$,故 $x+y=11$. $N=11^2(9x+1)$,$9x+1$ 须为平方数,唯有 $x=7$. 此时 $y=4$. 故矩形面积为 $xy=28$.

6. **证明** 依题设,可令 $2n^2=kd$,其中 k 为正整数. 假设 n^2+d 是整数 x 的平方,那么

$$k^2x^2=k^2(n^2+d)=n^2(k^2+2k)$$

注意到 $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$,故 $n^2(k^2+2k)$不是平方数,与 k^2x^2 为平方数相矛盾,故命题成立.

7. **证明** 四个连续自然数之积可以表示为

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)(n+3)\\=&(n^2+3n)(n^2+3n+2)\\=&(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)\\=&(n^2+3n+1)^2-1.\end{aligned}$$

而 $$(n^2+3n)^2<(n^2+3n+1)^2-1<(n^2+3n+1)^2$$

所以,四个连续自然数之积不是平方数.

8. **证明** 设五个连续自然数为 $n-2,n-1,n,n+1,n+2(n\geqslant 3)$,则

$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$.

若 $5(n^2+2)$ 为平方数，则 $5 \mid n^2+2$. 但因 n^2 的末位数只能是 0,1,4,5,6,9，故 n^2+2 的末位数只能是 1,2,3,6,7,8，不能为 0 或 5. 故 $5 \nmid n^2+2$. 这表明五个连续自然数的平方和不是平方数. 命题获证.

9. **证明** 如果这些数都是奇数. 由于奇数的平方被 8 除时余数都为 1，和 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2$ 被 8 除余 5，而 b^2 被 8 除余 1，矛盾. 命题获证.

10. **证明**

$$\begin{aligned}
&\underbrace{11\cdots1}_{k个1}\underbrace{22\cdots25}_{k+1个2}\\
&=\underbrace{11\cdots1}_{k个1}\times 10^{k+2}+\underbrace{22\cdots2}_{k+1个2}\times 10+5\\
&=\underbrace{11\cdots1}_{k个1}\times 10^{k+2}+2\times\underbrace{11\cdots1}_{k+1个1}\times 10+5\\
&=\frac{10^k-1}{9}\times 10^{k+2}+2\times\frac{10^{k+1}-1}{9}\times 10+5\\
&=\frac{1}{9}[(10^{2k+2}-10^{k+2})+2(10^{k+2}-10)+45]\\
&=\frac{1}{9}(10^{2k+2}+10^{k+2}+25)\\
&=\frac{1}{9}[(10^{k+1})^2+2\times 10^{k+1}\times 5+5^2]\\
&=\frac{1}{9}(10^{k+1}+5)^2\\
&=\frac{1}{9}[(\underbrace{99\cdots9}_{k+1个9}+1)+5]^2\\
&=[\frac{1}{3}(\underbrace{99\cdots9}_{k+1个9}+6)]^2\\
&=(\underbrace{33\cdots3}_{k+1个3}+2)^2.
\end{aligned}$$

$k=1,2,\cdots,n$.

11. **解** 分下列三种情况来讨论.

(i) 当 $n<8$ 时，$N=2^8+2^n=2^n(2^{8-n}+1)$. 为使 N 是平方数，必须 N 是偶数. 由于 $2^{8-n}+1$ 是奇数，则 2^n 也必须为平方数，即 n 为偶数:2,4,6. 经验证，可知 N 都不是平方数.

(ii) 当 $n=8$ 时，$N=2^8+2^n=2^8+2^8=2^9$，也不是平方数.

(iii) 当 $n>8$ 时，$N=2^8+2^n=2^8(1+2^{n-8})$. 为使 N 是平方数，必须使 $1+2^{n-8}$ 为一个奇数的平方. 设

$$1+2^{n-8}=(2k+1)^2=4k^2+4k+1.$$

于是 $$2^{n-8}=4k(k+1).$$

若 $n=9$ 时,则 $1=2k(k+1)$,左边为奇数,右边为偶数,矛盾;

若 $n=10$,则 $1=k(k+1)$,同样产生矛盾.

若 $n>10$,则 $k(k+1)=2^{n-10}$.

由于 k 和 $k+1$ 为一奇数,一偶数,于是只能是

$$\begin{cases} k=1, \\ k+1=2^{n-10}. \end{cases}$$

所以 $n=11$.

综合上述,$n=11$ 是惟一能使 2^8+2^n 为平方数的正整数.

12. **证明** (i)当 $x\geqslant y$ 时,$x^2+y+1\leqslant x^2+x+1$,所以 $x^2<x^2+y+1\leqslant x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$.

因为 x^2+y+1 夹在两个相邻的平方数之间,所以 x^2+y+1 不是平方数.

(ii)当 $x<y$ 时,$y^2<y^2+4x+3<y^2+4y+3<y^2+4y+4=(y+2)^2$,这时若 $y^2+4x+3\neq y^2+2y+1=(y+1)^2$,则 y^2+4x+3 就不是平方数.

若 $y^2+4x+3=y^2+2y+1$,即 $2y=4x+2$,$y=2x+1$ 时,y^2+4x+3 是完全平方数,这时有,

$(x+1)^2<x^2+y+3=x^2+(2x+1)+3=x^2+2x+4<x^2+4x+4=(x+2)^2$,

所以 x^2+y+3 不是平方数.

综上所述,对任意正整数 x,y,x^2+y+1 与 x^2+4x+3 中至少有一个是非平方数,也就是不能同时为平方数.

练习十一

1. 由 $13x<28$,可知 $x\leqslant 2$. 当 $x=1$ 时,$y=5$;当 $x=2$ 时,$y=\frac{2}{3}$. 故 $(x,y)=(1,5)$.

2. 原方程可变为 $(x-5)(y-2)=11=1\times 11$. 因 x,y 为正整数,$-4\leqslant x-5$,$-1\leqslant y-2$,故 $\begin{cases} x-5=1, \\ y-2=11; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-5=11, \\ y-2=1. \end{cases}$ 正整数解 (x,y) 的个数为 2.

3. 设所买金笔、依金笔、圆珠笔的支数为 x,y,z,则

$$\begin{cases} x+y+z=100, & ① \\ 10x+3y+\frac{1}{2}z=100. & ② \end{cases}$$

②×2－①得

$$19x+5y=100. \quad ③$$

由③可知 $5 \mid x$,且 $x<6$.所以 $x=5$,即为金笔购买支数.

4.设壹圆、贰圆、伍元的人民币各需 x,y,z 张,依题设,有

$$x+y+z=10, \quad ①$$

$$x+2y+5z=18. \quad ②$$

②－①得 $$y+4z=8. \quad ③$$

由③知 $4 \mid y$, $y=0,4,8$.相应地有三组解 $(x,y,z)=(2,8,0),(5,4,1),(8,0,2)$,即至多有3种不同付款方式.

5.依题设,有

$$\frac{a+c}{3}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+c}{6}=6,$$

即 $$4a+3b+11c=72. \quad ①$$

因 $\frac{a}{3},\frac{b}{4},\frac{c}{6}$ 为既约真分数,故 $a\leqslant 2, b\leqslant 3, b\neq 2$, c 为1或5,有

$$4a-3b+11c\leqslant 4\times 2+3\times 3+11\times 5=72. \quad ②$$

由①,②知 $a=2,b=3,c=5$.于是

$$\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}.$$

6.**解** 设原有盒子 x 个,增加3个盒子后,平均每个盒子装零件 y 个,则

$$12x+1=(x+3)y,$$

即 $$y=12-\frac{35}{x+3}.$$

因 $x\geqslant 10$, $(x+3) \mid 35$,故 $x+3=35$, $x=32$.进而有 $y=11$.故原有盒子32个,零件385个.

7.**解** 两方程相减,得

$$x+y^2-x^2-y=24,$$

即 $$(y-x)(x+y-1)=24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6.$$

显然, $y-x<x+y-1$,且 $y-x$ 与 $x+y-1$ 奇偶性不同,故有 $\begin{cases} y-x=1, \\ y+x-1=24; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y-x=3, \\ y+x-1=8. \end{cases}$ 解得 $(x,y)=(12,13),(3,6)$.进而可得 $c=$

57. 故所求解为$(x,y,z)=(12,13,57)$.

8. **解** 原方程可变为

$$2(x-3y+1)^2+3(2x-y)^2=20.$$

于是$(2x-y)^2\leqslant 6$, 即$(2x-y)^2$只可能是 0,1,4. 易知, 仅当$(2x-y)^2=4$时, $\frac{20-3(2x-y)^2}{2}$为平方数, 所以

$$\begin{cases}2x-y=\pm 2,\\ x-3y+1=\pm 2.\end{cases}$$

解之, 得 $x=1, y=0$, 即为原方程的整数解.

9. **解** 因 $2^{24}+2^{24}=2^{25}$, 故$(2^8)^3+(2^8)^4=(2^5)^5$, 这表明$(x,y,z)=(2^8,2^6,2^5)$是方程的一组正整数解.

容易验证$(k^{20}\cdot 2^8, k^{15}\cdot 2^6, k^{12}\cdot 2^5)$($k$ 为正整数)是方程的解, 故方程有无穷多个正整数解.

10. **解** 由原方程可得

$$y=\frac{5x+7}{3}=x+\frac{2x+7}{3}. \qquad ①$$

令$\frac{2x+7}{3}=t_1$(整数), 则

$$x=\frac{3t_1-7}{2}=t_1-3+\frac{t_1-1}{2}. \qquad ②$$

令 $t_2=\frac{t_1-1}{2}$(整数), 则 $t_1=2t_2+1$, 代入②得

$$x=(2t_2+1)-3+t_2=3t_2-2.$$

代入①得

$$y=3t_2-2+(2t_2+1)=5t_2-1.$$

依题设, 有

$$60<x+y=(3t_2-2)+(5t_2-1)=8t_2-3<80.$$

所以 $64\leqslant 8t_2\leqslant 82$, t_2. 可取 8,9,10. 于是$(x,y)=(22,39),(25,44),(28,49)$.

11. **解** 方程两边同乘以 $1991(x+1)y$, 并经整理得

$$xy-1991x-1990y-2\times 1991=0,$$

即

$$(x-1990)(y-1991)=1991\times 1992.$$

1991×1992 可化为两个负整数之积 $\alpha\cdot\beta$, 其中 $x-1990=\alpha, y-1991=\beta$, 这时 x,y 不能均为正整数. 1991×1992 也可化为两个正整数之积 $\gamma\cdot\delta$, 其中 $x-$

$1990=\gamma,\gamma-1991=\delta$.注意到 $1991\times1992=2^3\times3\times11\times83\times181$,所以要求的正整数解组的个数是

$$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=64.$$

练习十二

1.**解** 不能.如果能办到,那么所有数相加应是第一组各数的和的两倍,是个偶数.但这 50 个数的总和却是

$$1+2+\cdots+50=\frac{50(1+50)}{2}=25\times51,$$

是个奇数,矛盾.故不能办到.

2.**解** 不能.因 45045 是个奇数,它只能表示成三个奇数的乘积,而对任意两个奇数 $x,y(x\leqslant y)$,$y-x$ 是偶数,所以 $45045\neq xy(y-x)$.

3.**解** 设有 n 名选手参加比赛.依题设,每局比赛不管胜负如何,双方得分的和为 2,从而全部得分总数是 $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$,为偶数,只可能是 1980 或 1984.方程 $n(n-1)=1980$ 的正整数解 $n=45$;方程 $n(n-1)=1984$ 无整数解.所以参赛选手共有 45 名.

4.**解** 每操作一次,黑板上数的和减少了 $(a+b)-|a-b|$.由于 $a+b$ 与 $a-b$ 的奇偶性相同,故 $(a+b)-|a-b|$ 是偶数,所以每次操作不改变原来所有数和的奇偶性.由于

$$1+2+\cdots+1993=\text{奇数},$$

所以,当黑板上最后剩下一个数时必为奇数.

5.**解** 不能.就每只杯子而言,只有翻动奇数次才能使杯口朝下.若要使 7 只杯子杯口都朝下,则总翻动的次数应为奇数.但每次能且只能是翻动 4 只杯子,这样一来,不管翻动多少次,翻动杯子的总数为偶数.因此,无论翻动多少次,也不可能使所有茶杯的杯口朝下.

6.**证明** 依题设,$11111+a$ 与 $11111-b$ 均为奇数,故 a,b 均为偶数,$4|ab$.又依题设,有

$$11111(a-b)=ab+2468=ab+4\times617,$$

而 $(4,11111)=1$,故 $4|a-b$.

7.**证明** $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+1998x_{1998}=(x_1+x_3+\cdots+x_{1997})+2(x_2+x_3+2x_4+2x_5+\cdots+998x_{1996}+999x_{1998})$.依题设,$x_1+x_3+\cdots+x_{1997}$ 为 999 个 1 或

-1 相加，其和必为奇数，因此 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+1998x_{1998}\neq 0$.

8. **证明** 显然，原数是 1999 位数. 设其为 $\overline{a_1a_2\cdots a_{1999}}$，改变顺序后的数为 $\overline{b_1b_2\cdots b_{1999}}$. 假若

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{1999}}+\overline{b_1b_2\cdots b_{1999}}=\underbrace{99\cdots9}_{1999个9},$$

因 $0\leqslant a_{1999},b_{1999}\leqslant 9$，故 $a_{1999}+b_{1999}=9$. 同理 $a_i+b_i=9(i=1,2,\cdots,1998)$. 将上述各式相加得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1999})+(b_1+b_2+\cdots+b_{1999})=1999\times 9,$$

即
$$2(a_1+a_2+\cdots+a_{1999})=1999\times 9$$

上式左边为偶数，右边为奇数，这不可能. 故命题成立.

9. **证明** 由于每个 x_i 均为 $+1$ 或 -1，从而 $x_1x_2x_3x_4$，$x_2x_3x_4x_5$，$\cdots$，$x_nx_1x_2x_3$，也只取 $+1$ 或 -1，而这样的 n 项之和等于 0，则取 $+1$ 或 -1 的个数必相等，因而 n 必是偶数. 可设 $n=2m$. 下证 m 也是偶数. 考察 $x_1x_2x_3x_4$，$x_2x_3x_4x_5$，$\cdots$，$x_nx_1x_2x_3$ 的乘积，它们等于 $(-1)^m$，另一方面，它们又等于

$$(x_1x_2\cdots x_n)^4=1,$$

所以 $(-1)^m=1$. 从而 m 为偶数. 故 $4\mid n$.

10. **解** (1)代数式中共有 6 项，每项的值都是奇数，故代数式的值为偶数.

(2)由于代数式中的 6 个项相乘的积为

$$-(rstuvwxyz)^2=-1.$$

所以六项中至少有一项是 -1，这样一来代数式的和至多为 4.

当 $u=x=y=-1$，$r=s=t=v=w=z=1$ 时，代数式的值为 4.

由上述知代数式的最大值为 4.

练习十三

1. 易证 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，$\triangle BDF\cong\triangle CEF$，$\triangle ADF\cong\triangle AEF$，$\triangle ABF\cong\triangle ACF$. 图中全等三角形共 4 对.

2. 由 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ 可得 $AB=AC$，$AE=AD$，故

$$CD=AD-AC=AD-AB=5-2=3.$$

3. 易证 $\triangle DAB\cong\triangle EAC$，$\angle DAB=\angle EAC$. 于是

$$\angle DAE=\angle DAB-\angle EAB=\angle CAE-\angle EAB=90^\circ.$$

4. **证明** 因 $AB \parallel CD$，故 $\angle ABO = \angle DCO$，又 $\angle AOB = \angle COD$，$OA = OD$，故 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$，有 $OC = OB$. 因 $AE = DF$，有 $OA + AE = OD + DF$，即 $OE = OF$. 故 $\triangle BOE \cong \triangle COF$，得 $\angle E = \angle F$，所以 $CF \parallel EB$.

5. **证明** 因 $AD = BD$，$CD = DE$，$\angle ADB = \angle ADC$，故 $\mathrm{Rt}\triangle ADC \cong \mathrm{Rt}\triangle BDE$，得 $\angle DBE = \angle DAC$. 于是

$$\angle AFE = \angle C + \angle CBF = \angle C + \angle DAC = 90°.$$

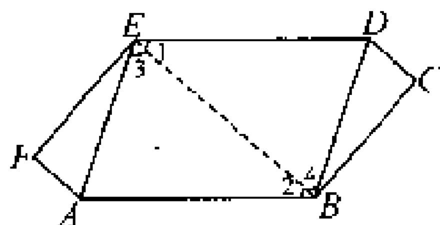
即 $BF \perp AC$.

6. **证明** 因 $\angle DAB = 90°$，$\angle CAE = 90°$，故 $\angle DAC = \angle BAE$. 又 $AD = AB$，$AC = AE$，故 $\triangle DAC \cong \triangle BAE$，有 $CD = BE$，$\angle ABE = \angle ADC$. 于是

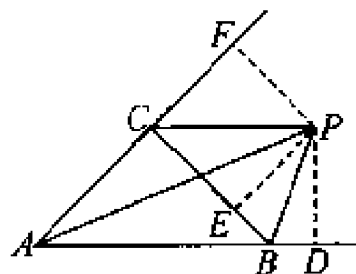
$$\angle EFD = \angle EBD + \angle BDF = \angle ABE + \angle ABD + \angle ADB - \angle ADC = 90°.$$

7. **证明** 连结 AC、AD. 因 $AB = AE$，$\angle B = \angle E$，$BC = ED$，所以 $\triangle ABC \cong \triangle AED$，有 $AC = AD$. 又因 $CF = DF$，AF 公共，所以 $\triangle ACF \cong \triangle ADF$，有 $\angle AFC = \angle AFD$. 而 $\angle AFC + \angle AFD = 180°$，故 $\angle AFC = 90°$，即 $AF \perp CD$.

8. **证明** 连结 BE（如图）. 因 $AB \parallel ED$，$AE \parallel BD$，故 $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 3 = \angle 4$. 又 BE 公共，所以 $\triangle ABE \cong \triangle DEB$. 有 $AE = DB$. 又 $AF = CD$，$EF = BC$，所以 $\triangle AEF \cong \triangle DBC$. 于是 $\angle C = \angle F$.

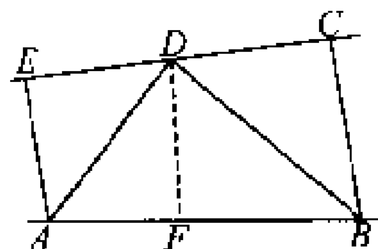


（第 8 题）



（第 9 题）

9. **证明** 如图，过 P 作 $PE \perp BC$ 于 E，$PD \perp AB$ 于 D，$PF \perp AC$ 于 F. 因点 P 在 $\angle CBD$ 的平分线上，故 $PD = PE$. 同理 $PE = PF$. 所以 $PD = PF$，P 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

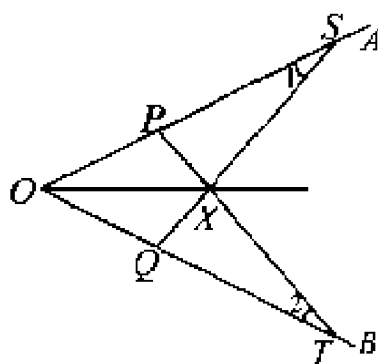


（第 10 题）

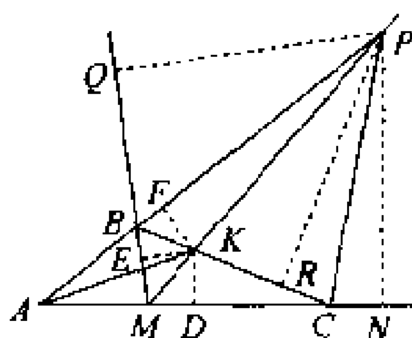
10. **证明** 在 BC 上截取 $BF = BC$，连结 DF. 因 $\angle CBD = \angle FBD$，$CB = FB$，BD 公共，所以 $\triangle BCD \cong \triangle BFD$，有 $\angle BCD = \angle BFD$. 因 $BC \parallel AE$，有 $\angle C + \angle E = 180°$，又 $\angle BFD + \angle AFD$

$=180°$,故$\angle E=\angle AFD$.因$\angle EAD=\angle FAD$,AD公共,所以$\triangle ADE\cong\triangle ADF$,有$AE=AF$.于是$AB=AF+FB=AE+BC$.

11.**证明** 因$OS=OT$,$OQ=OP$,$\angle AOB=\angle BOA$,所以$\triangle SOQ\cong\triangle TOP$,有$\angle 1=\angle 2$.又因$\angle PXS=\angle QXT$,$PS=QT$,故$\triangle PXS\cong\triangle QXT$,所以$XS=XT$.进而可知$\triangle SOX\cong\triangle TOX$,所以$\angle SOX=\angle TOX$,即$OX$是$\angle AOB$的平分线.



(第11题)



(第12题)

12.**解** 过P分别作BC、AC延长线、MB延长线的垂线,垂足分别为R、N、Q(如图).因$\angle ABC=120°$,BM平分$\angle ABC$,所以$\angle QBP=\angle ABM=60°=\angle PBC$,即$BP$是$\angle CBQ$的平分线.所以$PQ=PR$.$PR=PN$,可得$PQ=PN$.因此,$MP$是$\angle QMN$($\angle BMC$)的平分线.

过K分别作AC、BM、AP的垂线,垂足分别为D、E、F.$KD=KE$.又$\angle MBC=60°=\angle PBC$,即$BK$平分$\angle MBP$.所以$KE=KF$,$KD=KF$.所以$AK$是$\angle BAC$的平分线.于是

$$\begin{aligned}\angle AKM&=\angle KMC-\angle KAM=\frac{1}{2}\angle BMC-\frac{1}{2}\angle BAC\\&=\frac{1}{2}(\angle BMC-\angle BAC)=\frac{1}{2}\angle ABM\\&=\frac{1}{2}\times 60°=30°.\end{aligned}$$

练习十四

1.$\angle BCA=\angle A=25°$,$\angle CBD=\angle CDB=50°$,$\angle BCD=80°$,$\angle DCE=\angle CDE=75°$,$\angle CED=30°$,$\angle EDF=\angle EFD=55°$,$\angle DEF=70°$,$\angle FEG=80°$.

2.如果高在等腰三角形内,则顶角为45°,底角为67.5°;如果高在三角形外,则底角为22.5°.所以这个三角形的底角为67.5°或22.5°.

3. 由$\angle A=36^\circ$，$\angle ACB=72^\circ$知

$$\angle ABC=180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ=\angle ACB.$$

故 $AB=AC$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又 BD 平分$\angle ABC$，所以 $AD=BD$，$\triangle ABD$ 为等腰三角形.

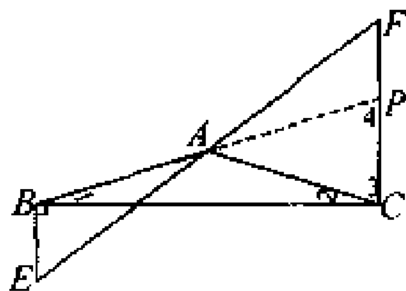
$$\angle BDC=180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ=\angle BCD,$$

于是 $BC=BD$，$\triangle BCD$ 为等腰三角形. 因 $CE\perp BD$，有$\angle BFE=\angle BFC=90^\circ$，又$\angle EBF=\angle FBC$，$BF$ 公共，故$\triangle BEF\cong\triangle BCF$. 所以 $BE=BC$，$\triangle BEC$ 为等腰三角形，$BE=BD$. $\triangle BDE$ 为等腰三角形. 因 BD 为 EC 的垂直平分线，$ED=CD$，$\triangle DCE$ 为等腰三角形，$\angle ADE=180^\circ-2\times72^\circ=36^\circ=\angle A$，所以 $EA=ED$，$\triangle AED$ 为等腰三角形.

综上所述，共有 7 个等腰三角形.

4. 在$\triangle DEC$ 与$\triangle ABC$ 中，$\angle EDC=\angle BAC$，进而知$\angle CED=\angle B=60^\circ$. 易知$\triangle ADE\cong\triangle ADF$，可得$\angle BFD=\angle CED$，故$\triangle BDF$ 为等边三角形，与 DE 的长相等的线段有 DF、BF、BD 这 3 条.

5. **证明**　如图，延长 BA 交 CF 于 P. 由 $AB=AC$ 知$\angle1=\angle2$. 因为$\angle1+\angle4=90^\circ$，$\angle2+\angle3=90^\circ$，所以$\angle3=\angle4$，$AP=AC=AB$. 又由 $BE\parallel FC$，有$\angle E=\angle F$，且$\angle BAE=\angle FAP$，$AB=AP$，所以$\triangle ABE\cong\triangle APF$，$AE=AF$.



(第 5 题)

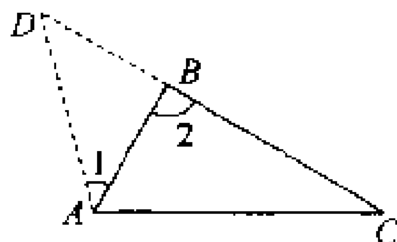
6. **证明**　因 $AC>BC>AB$，故$\angle B>\angle A>\angle C$. 有$\angle B=2\angle A$ 或$\angle B=2\angle C$ 或$\angle A=2\angle C$.

(i)当$\angle B=2\angle A$ 时，

$$180^\circ=\angle A+\angle B+\angle C<\angle A+\angle B+\angle A$$
$$=2\angle A+\angle B=2\angle B.$$

所以$\angle B>90^\circ$与$\triangle ABC$ 不是钝角三角形矛盾.

(ii)当$\angle B=2\angle C$ 时，延长 CB 于 D，使 $BD=AB$，连结 AD(如图(1))



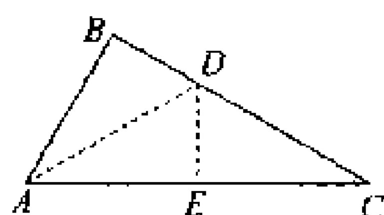
(第 6 题)(1)

因$\angle D=\angle1$，所以$\angle2=\angle D+\angle1=2\angle D$. 又$\angle2=2\angle C$，故$\angle D=\angle C$，有 $AD=AC$. 于是

$$AC = AD < AB + BD = 2AB,$$

与 $AC = 2AB$ 矛盾.

(iii)当 $\angle A = 2\angle C$ 时,作 $\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于 D(如图(2)),则 $\angle DAE = \angle C$,有 $AD = DC$.



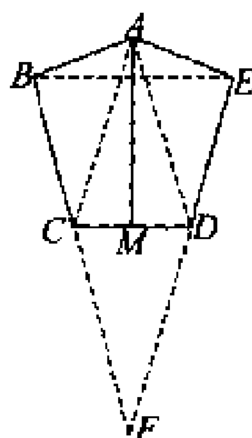
(第 6 题)(2)

取 AC 中点 E,连结 DE,则 $DE \perp DC$.又因 $AB = \frac{1}{2}AC = AE$,所以 $\triangle ABD \cong \triangle AED$,有 $\angle B = \angle AED = 90°$,所以 $AB \perp BC$.

综合上述,$AB \perp BC$.

7. **证明** 延长 BC、AE 交于 F,因 $AC = BC$,$\angle ACB = \angle ACF$,故 $Rt\triangle ACF \cong Rt\triangle BCD$,有 $AF = BD = 2AE$.所以 E 为 AF 中点,BD 平分 $\angle ABC$.

8. **证明** 连结 AC、AD、BE,延长 BC、ED 交于 F(如图),则 $\angle FCD = \angle FDC$,有 $CF = DF$.又 $BC = DE$,所以 $BF = EF$,有 $\angle FBE = \angle FEB$.因 $\angle ABC = \angle AED$,故 $\angle ABE = \angle AEB$,$AB = AE$.所以 $\triangle ABC \cong \triangle AED$,有 $AC = AD$.又 M 为 CD 中点,所以 $AM \perp CD$.

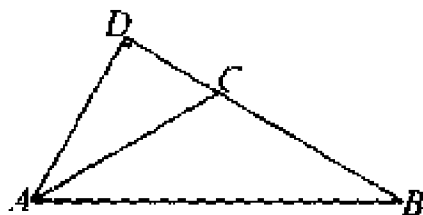


(第 8 题)

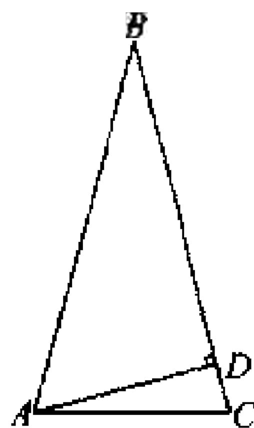
9. **解** 依题意,易知 $\angle A$ 为等腰三角形的一个底角.

(i)当 $\angle C$ 为顶角时(如图(1)),$AD \perp BC$,$\angle DAB = 60°$,$\angle CAB = \angle B = 30°$,$\angle ACB = 180° - 2 \times 30° = 120°$.

(ii)当 $\angle B$ 为顶角时,若 $\angle B$ 为锐角(如图(2)),则



(第 9 题)(1)



(第 9 题)(2)

$$\angle B = 90° - \angle DAB = 30°,$$

$$\angle BAC = \angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle B) = 75°;$$

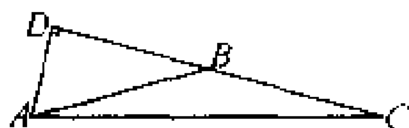
若 $\angle B$ 为直角,B 与 D 重合,不合题意,舍去;

若$\angle B$为钝角（如图(3)），则

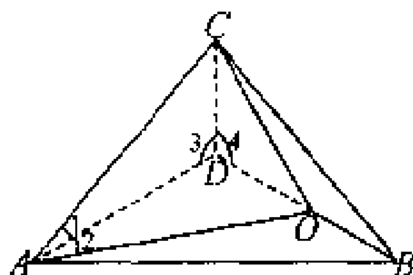
$$\angle ABC=\angle DAB+\angle D=60^\circ+90^\circ=150^\circ,$$

$$\angle BAC=\angle C=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=15^\circ.$$

综合上述，$\triangle ABC$的三个内角分别为$120^\circ,30^\circ,30^\circ$或$30^\circ,75^\circ,75^\circ$或$150^\circ,15^\circ,15^\circ$.



（第9题）(3)



（第10题）

10.**解** 作$\angle CAO$的平分线交BO的延长线D（如图）. 因$\angle ACB=80^\circ$，$AC=CB$，故$\angle CAB=50^\circ$. 又$\angle OAB=10^\circ$，所以$\angle 1=\angle 2=20^\circ$. 于是$\angle DAB=30^\circ=\angle DBA$，$\angle ADB=120^\circ$，$DA=DB$，则$\triangle CAD\cong\triangle CBD$，有$\angle 3=\angle 4$. 进而得

$$\angle 3=\frac{1}{2}(360^\circ-120^\circ)=120^\circ=\angle ADO,$$

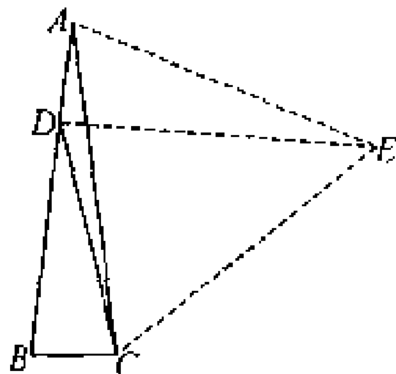
所以$\triangle ACD\cong\triangle AOD$，有$AC=AO$. 可得

$$\angle OCA=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ.$$

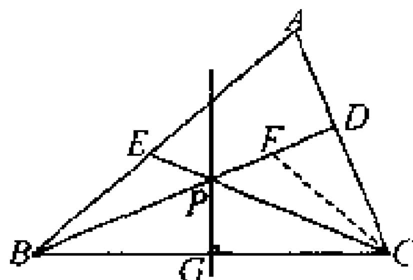
11.**解** 以AC为边向外作等边$\triangle ACE$，连结DE（如图），则$AE=AB$，

$$\angle EAD=\angle EAC+\angle CAD=80^\circ=\angle B.$$

又$AD=BC$，所以$\triangle ADE\cong\triangle BCA$，有$\angle AED=\angle BAC=20^\circ$. 所以$DE=AC$. 进而有$DE=EC$. 因



（第11题）



（第12题）

$$\angle DEC=\angle AEC-\angle AED=60^\circ-20^\circ=40^\circ,$$

故
$$\angle ECD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DEC)=70^\circ.$$

可得$\angle ACD=10^\circ$.于是

$$\angle BDC=\angle ACD+\angle DAC=10^\circ+20^\circ=30^\circ.$$

12.如图,在 BD 上截取 $BF=CE$.因为 PG 为 BC 的垂直平分线,所以$\angle PBC=\angle PCD=\frac{1}{2}\angle A$.显然$\triangle BCE\cong\triangle CBF$, $BE=CF$, $\angle EBP=\angle FCP$.因为$\angle CDF=\angle A+\angle ABP$, $\angle CFD=\angle FBC+\angle BCF=2\angle PBC+\angle FCP=\angle A+\angle FCP$,所以$\angle CDF=\angle CFD$, $CD=CF=BE$.

练习十五

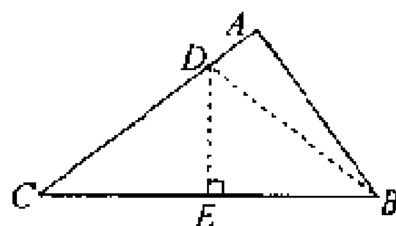
1.等边$\triangle ABC$的边长为2.因 D 是AC中点,故 $BD=\sqrt{3}$.又 $CD=CE$,故$\angle E=\frac{1}{2}\angle DCB=\angle DBC$,有 $DE=BD$.所以$\triangle BDE$的周长为

$$BD+DE+BE=2\sqrt{3}+2+1=3+2\sqrt{3}.$$

2.如图,易知折痕 DE 垂直平分 BC, $\angle A=90^\circ$.设 $CD=x$,则 $BD=x$, $AD=4-x$.在 Rt$\triangle ABD$ 中,根据勾股定理,有

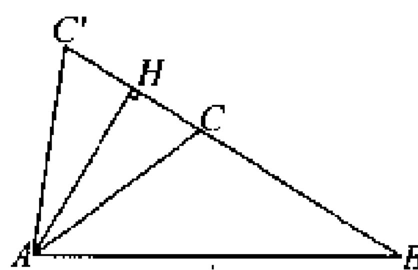
$$x^2=(4-x)^2+3^2,$$

解得 $x=\frac{25}{8}$.所以 $DE=\sqrt{(\frac{25}{8})^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{15}{8}$.



(第2题)

3.如图,设 BC 边上的高 $AH=\sqrt{3}$.由 $AC=2$ 知 $CH=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.又 $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=3$,当 B、C 在 H 同旁时, $BC=2$;当 B、C 在 H 两旁时, $BC=4$.故 BC 的长为2或4.

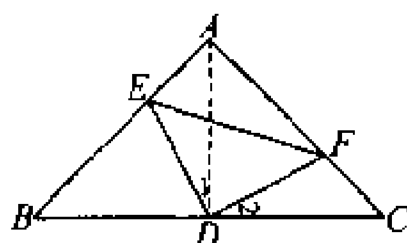


(第3题)

二、解答题

4.**解** 如图,连 AD.因 D 为等腰直角三角形 斜边BC的中点,有 $AD=BD=DC$,且 $AD\perp BC$.又 $DE\perp DF$,故$\angle 1=\angle 2$.注意到$\angle BAD=\angle C=45^\circ$,所以$\triangle ADE\cong\triangle CDF$.可得 $ED=DF$,且 $AE=CF=5$.进而

知 $AF=BE=12$.



(第 4 题)

在 Rt△AEF 中,根据勾股定理可知

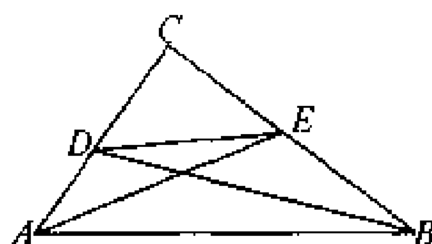
$$EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13.$$

于是 $DE=DF=\frac{\sqrt{2}}{2}EF$,可得

$$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot DF=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}EF)^2=42\frac{1}{4}.$$

5. 在 Rt△BAC 中,$AD\perp BC$,$\angle BAC=90°$,有$\angle C+\angle B=\angle B+\angle BAD=90°$,故$\angle BAD=\angle C$. 又 $BM=MC$,有$\angle MAC=\angle C$,且$\angle BAE=\angle CAE$,故$\angle DAE=\angle MAE$.

6. 在 Rt△ABC 与 Rt△DCE 中,根据勾股定理,有 $AC^2+BC^2=AB^2$, $CD^2+CE^2=DE^2$,又在 Rt△ACE 与 Rt△DCB 中,有 $AC^2+CE^2=AE^2$, $CD^2+BC^2=BD^2$,所以

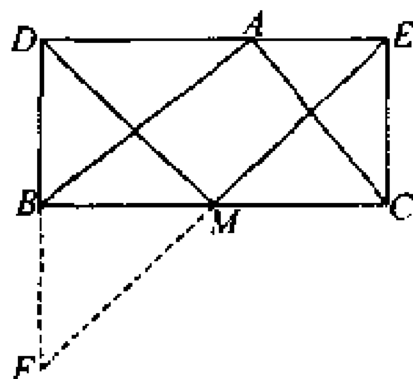


(第 6 题)

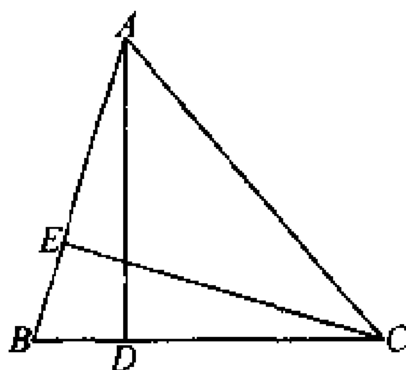
$$\begin{aligned}BD^2+AE^2&=CD^2+BC^2+AC^2+CE^2\\&=(CD^2+CE^2)+(BC^2+AC^2)\\&=DE^2+AB^2.\end{aligned}$$

7. **解** 显然△AKD≌△GKD,有 $GD=AD$. 又因 $AD=2DF$,所以 $GD=2DF$. 因$\angle DFG=90°$,故$\angle DGF=30°$. 于是$\angle ADG=\angle DGF=30°$,$\angle GDK=15°$. 又$\angle KGD=\angle A=90°$,所以$\angle DKG=75°$.

8. **证明** 如图,延长 EM、DB 相交于 F. 因 M 为 BC 中点,$BM=CM$,又 $BF\perp DE$,$CE\perp DE$,有 $BF\parallel CE$,可得$\angle MBF=\angle MCE$,$\angle BMF=\angle CME$,所以△MBF≌△MCE,有 $MF=ME$,即 M 为 Rt△EDF 斜边上中点. 故 $MD=ME$.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. **解** 如图，设 AD、CE 分别为 BC、AB 上的高，若 $\angle B\neq 90^\circ$，则 $AB>AD$，$BC>CE$，于是

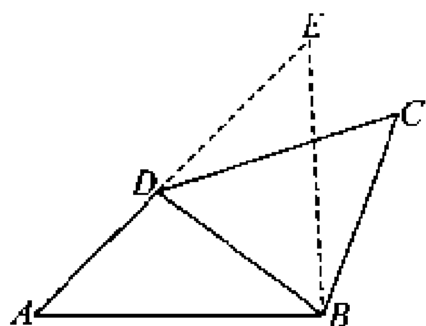
$$AB+BC>AD+CE.$$

由题设 $AD\geqslant BC$，$CE\geqslant AB$，有

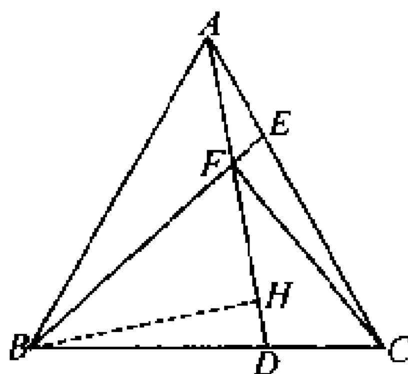
$$AB+BC\leqslant AD+CE,$$

矛盾. 故 $\angle B=90^\circ$. 从而知 $AB\perp BC$. 此时 $AB=AD\geqslant BC$，$BC=CE\geqslant AB$，可知 $AB=BC$，故 $\triangle ABC$ 的三个角的度数分别为 45°，45°，90°.

10. **解** 延长 AD 于 F，使 $DE=BC$（如图）. 连结 EB，因 $\angle EDB=\angle DBC=75^\circ$，故 $\triangle DBE\cong\triangle BDC$，可知 $BE=DC$，$\angle E=\angle C=45^\circ$. 又 $\angle A=\angle E=45^\circ$，所以 $AB=BE$，有 $AB=CD$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. **证明** 作 $BH\perp AD$. 因 $\angle BAC=\angle ACD=60^\circ$，$AE=CD$，$AB=AC$，故 $\triangle ABE\cong\triangle CAD$，可得 $\angle ABE=\angle CAD$. 于是

$\angle BFD=\angle ABE+\angle BAF=\angle CAD+\angle BAF=\angle BAC=60^\circ$

在 $\mathrm{Rt}\triangle FBH$ 中，$\angle FBH=30^\circ$，故 $FH=\dfrac{1}{2}BF$，有 $AH=BF$.

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle BCF$ 中，$AB=BC$，$\angle BAH=\angle CBF$，$AH=BF$，所以 $\triangle ABH\cong\triangle BCF$. 于是 $\angle AHB=\angle BFC=90^\circ$，有 $CF\perp BE$.

练习十六

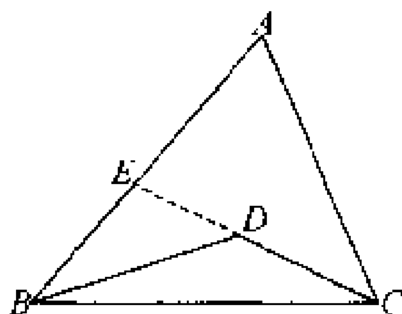
1. **证明** 如图，延长 CD 交 AB 于 E. 在 $\triangle ACE$ 中，$AE+AC>CE$，即

$$AE+AC>ED+DC.$$

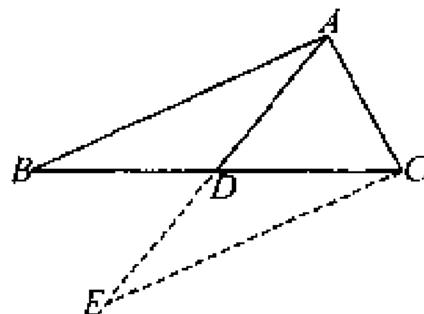
又在 $\triangle BED$ 中，$BE+ED>BD$. 两式相加，得

$$AC+(AE+BE)+ED>ED+DC+BD,$$

即
$$AB+AC>DB+DC.$$



（第1题）



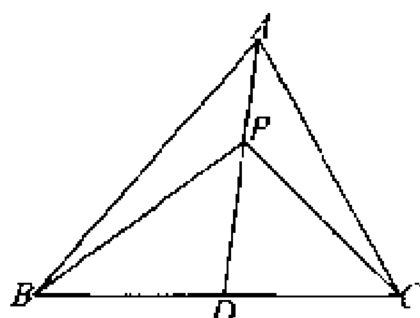
（第2题）

2.**证明** 如图，延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，则$\triangle ECD\cong\triangle ABD$，有 $EC=AB$，$\angle BAD=\angle E$。因 $AB>AC$，故 $EC>AC$，可知$\angle CAD>\angle E$，即$\angle BAD<\angle CAD$.

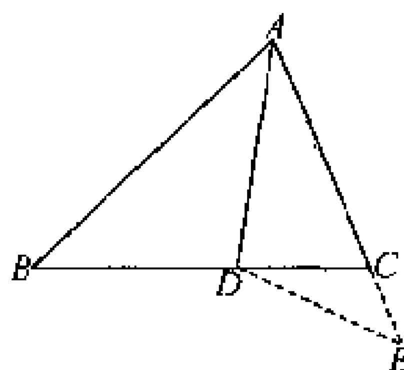
3.**证明** 在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 中，$BD=DC$，$AD=AD$，$AB>AC$，故$\angle ADB>\angle ADC$.

在$\triangle PBD$ 和$\triangle PCD$ 中，$BD=DC$，$PD=PD$，$\angle PDB>\angle PDC$，所以 $PB>PC$，可得$\angle PCB>\angle PBC$.

4.**证明** $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\frac{1}{2}AB\cdot CF$，故 $AC\cdot BE=AB\cdot CF$。因 $AB>AC$，所以 $BE>CF$.



（第3题）



（第5题）

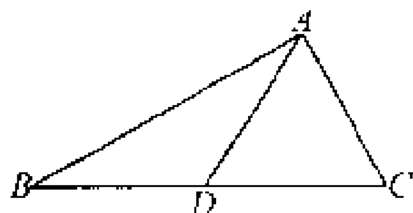
5.**证明** 如图．延长 AC 到 E，使 $AE=AB$。又连结 DE，因$\angle BAD=\angle EAD$，AD 公共，可知$\triangle BAD\cong\triangle EAD$，有 $DE=BD$，$\angle E=\angle B$.

在$\triangle ABC$ 中，因 $AB>AC$，故$\angle ACB>\angle B$，又$\angle DCE=\angle B+\angle BAC$，使$\angle DCE>\angle E$，可得 $DE>DC$，即 $BD>DC$.

6.**证明** 因 $AB>AC$，故$\angle ACB>\angle ABC$，进而有$\angle ABD>\angle ACE$。因 $AB=BD$，故$\angle D=\angle DAB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABD)$。同理$\angle E=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACE)$。所以

$\angle E > \angle D$. 于是 $AD > BC$.

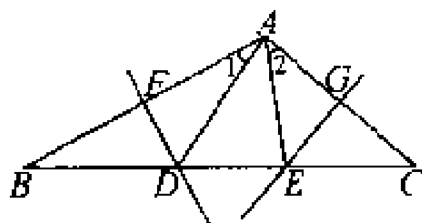
7. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 中线，$AD < \frac{1}{2}BC$. 求证：$\triangle ABC$ 为钝角三角形.



（第 7 题）

证明 因 $AD < \frac{1}{2}BC$，故 $AD < BD$. 于是 $\angle B < \angle BAD$. 同理 $\angle C < \angle DAC$. 所以 $\angle B + \angle C < \angle BAC$. 进而知 $\angle B + \angle C < 90^\circ$，$\angle BAC > 90^\circ$. 因此，$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

8. **证明** 在 $\triangle ABC$ 中，因 $AB > AC$，故 $\angle C > \angle B$. 因 DF 垂直平分 AB，所以 $AD = BD$，$\angle B = \angle 1$. 同理 $\angle C = \angle 2$. 因 $\angle ADE = \angle B + \angle 1 = 2\angle B$，$\angle AED = \angle C + \angle 2 = 2\angle C$，所以 $\angle AED > \angle ADE$，有 $AD > AE$.



（第 8 题）

9. **证明** 延长 BC 到 E，使 $CE = CA$，延长 CB 到 D，使 $BD = BA$. 连结 $B'D$、$C'E$、$B'E$. 易知 $\triangle ABB' \cong \triangle DBB'$，有 $B'A = B'D$. 同理 $AC' = C'E$. 即 $\triangle AB'C'$ 的周长 $= DB' + B'C' + C'E$，$\triangle ABC$ 的周长 $= DB + BC + CE$.

在 $\triangle B'C'E$ 中，$B'C' + C'E > B'E$，即 $B'C' + C'A > B'E$；在 $\triangle B'DE$ 中，$DB' + B'E > DE$，即 $B'A + B'E > DE$. 两式相加，得

$$AB' + B'C' + C'A + B'E > B'E + DE,$$

即

$$AB' + B'C' + C'A > AB + BC + CA.$$

故 $\triangle ABC$ 的周长 $< \triangle AB'C'$ 的周长.

10. **证明** 过 I 作 $IM \perp BC$，$IN \perp AC$，垂足分别为 M、N，则

$$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle ABC > \frac{1}{2}\angle BAC + \angle C = \angle ADB,$$

所以 $\angle ADC > 90^\circ$. M 在 B、D 之间. 同理 N 在 A、E 之间. 因

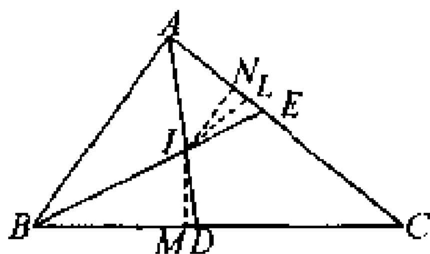
$$\angle IEN = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle C < \frac{1}{2}\angle BAC + \angle C = \angle IDM,$$

于是

$$\angle EIN = 90^\circ - \angle IEN > 90^\circ - \angle IDM = \angle DIM.$$

因此，可在 $\angle EIN$ 内作 $\angle NIL = \angle DIM$，注意到 $IN = IM$，故 $\triangle NIL \cong \triangle MID$. 从而

可得 $ID = IL < IE$.



(第 10 题)

练习十七

1.**证明** 因四边形 $ABCD$ 是平行四边形,故 $AB \mathrel{\underline{/\!/}} CD$,有$\angle ABD = \angle CDB$.又$\triangle ABE$ 与$\triangle CDF$ 是等边三角形,所以 $BE = AB = CD = DF$.因

$$\angle EBD = 60° + \angle ABD = 60° + \angle CDB = \angle BDF,$$

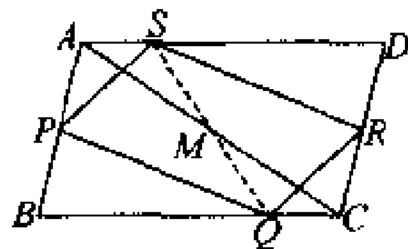
所以$\angle GBE = \angle HDF$.又$\angle EGB = \angle FHD = 90°$,故 $\mathrm{Rt}\triangle EGB \cong \mathrm{Rt}\triangle FHD$,有 $EG = FH$.

2.**解** 因$\frac{S_1}{S_2} = \frac{DF}{FB} = \frac{DE}{AB} = \frac{5}{8}, \frac{S_2}{S_3} = \frac{EF}{AF} = \frac{DE}{AB} = \frac{5}{8}$.
故 $S_1 : S_2 : S_3 = 25 : 40 : 64$.

3.已知:如图,$\square PQRS$ 的顶点分别在$\square ABCD$ 的各边上.

求证:AC、BD、RP、SQ 交于同一点.

证明 如图,在$\triangle APS$ 和$\triangle CRQ$ 中,$PS = QR$.连结 SQ,因 $AD /\!/ BC$,故$\angle ASQ = \angle CQS$.又 $PS /\!/ QR$,有$\angle PSQ = \angle RQS$,所以$\angle ASP = \angle CQR$.同理$\angle APS = \angle CRQ$.于是$\triangle APS \cong \triangle CRQ$,有 $AS = CQ$.又 $AS /\!/ CQ$,因而四边形 $AQCS$ 为平行四边形.SQ 与 AC 相交于 AC 中点 M.同理 RP 也过点 M.又 BD 与 AC 交于 M,故命题成立.



(第 3 题)

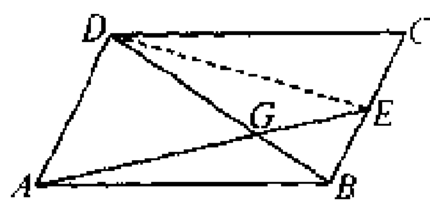
4.**解** 连结 DE.因 E 为 BC 中点,故 $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle DEB}$.设 $S_{\triangle AGD} = x, S_{\triangle AGB} = y$,则 $S_{\triangle DGE} = y$.又 $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle CDB}, S_{\triangle BEG} = 1$,故

$$x + y = 2(y + 1). \qquad ①$$

又$\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ABG}} = \frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle EGB}}$,即

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{1},$$

所以 $y^2=x$. ②



(第4题)

由①,②可得 $y=2,x=4$. 故 $S_{\square ABCD}=2(x+y)=12$.

5.**证明** 因△ACE 为等边三角形,有 $EC=AE$.

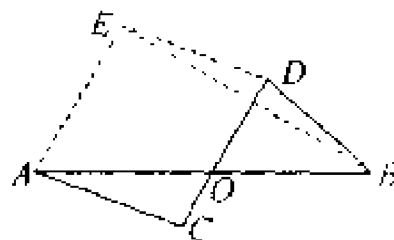
又▱$AEFD$ 中 $AE=FD$,故 $EC=FD$.同理 $EF=BD$.因△ABD 是等边三角形,$\angle CEA=\angle ADB=60°$,而$\angle AEF=\angle FDA$,所以$\angle CEF=\angle FDB$.于是△$FEC$≌△$BDF$,有 $FB=FC$.

因
$$\begin{aligned}\angle BAC&=360°-\angle CAE-\angle BAD-\angle DAE\\&=360°-60°-60°-(180°-\angle ADF)\\&=60°+\angle ADF=\angle FDB.\end{aligned}$$

且 $AB=BD,AC=CE=DF$,所以△BAC≌△BDF,有 $BC=BF$.于是△BCF 为等边三角形.

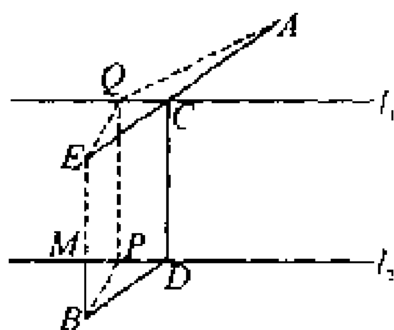
6.**证明** 作 $AE/\!/CD$,$BE\perp AE$,交于 E.连结 DE(如图),则$\angle BAE=\angle AOC=60°$.在 Rt△$ABE$ 中,$\angle ABE=30°$,有 $AE=\frac{1}{2}AB=1$,$BE=\sqrt{3}$.由 $AE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CD$ 知四边形 $ACDE$ 为平行四边形,$AC=DE$.故

$$AC+BD=DE+BD\geqslant BE=\sqrt{3}.$$



(第6题)

7.**解** 作 $BM\perp l_2$ 于 M,在 BM 或其延长线上截取 BE 等于河宽.连结 EA 交 l_1 于 C,作 $CD\perp l_2$ 于 D.则 $BD+DC+CA$ 就是由 A 到 B 的最短路程,即桥址应选在 CD 处(如图).

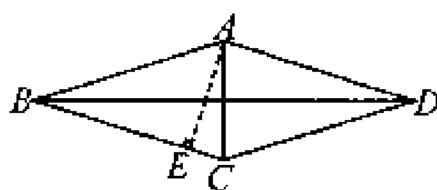


(第7题)

证明 设 PQ 为桥的另一位置,则 $PQ \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} BE$.因四边形 $BPQE$ 为平行四边形,所以 $PB=QE$,又 $CE=DB$,而两点间的距离线段最短,故 $AQ+QE>AE$,即 $BP+AQ>AE=BD+CA$.因而 $BP+PQ+QA>BD+CD+CA$.

练习十八

1.**证明**　作 $AE \perp BC$，垂足 E（如图）. 因$\angle ABC = 30°$，故 $AE = \frac{1}{2}AB$. 又四边形 $ABCD$ 是菱形，故 $AB = BC$，且



（第 1 题）

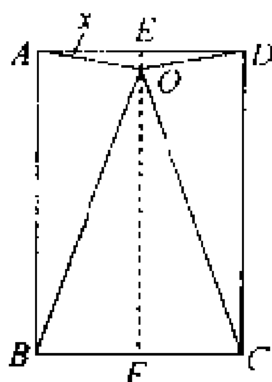
$$S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AE = \frac{1}{2}BC \cdot AB,$$

所以 $AB^2 = AC \cdot BD$.

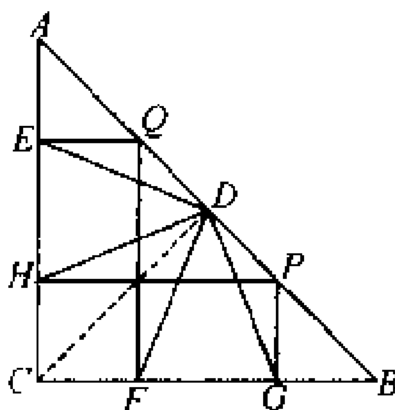
2.**证明**　如图，过 O 作 $EF \perp BC$，分别交 AD、BC 于 E、F. 设$\angle OAD = x$，则$\angle AOE = 90° - x$，$\angle OAB = 90° - x$，$\angle BOC = 4\angle OAD = 4x$，因 $OA = OD$，故 EF 垂直平分 AD，也垂直平分 BC，$OB = OC$，$\angle BOF = \frac{1}{2}\angle BOC = 2x$. 所以

$$\angle AOB = 180° - \angle AOE - \angle BOF = 180° - (90° - x) - 2x = 90° - x,$$

有$\angle OAB = \angle AOB$，$OB = AB$. 所以 $OB = OC = AB$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3.**证明**　如图，连结 CD. 因$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AD = DB$，故 $AD = DC$，$\angle A = \angle DCF = 45°$. 又四边形 $ECFQ$ 是矩形，$AE = EQ = CF$. 所以$\triangle AED \cong \triangle CFD$，$ED = DF$. 同理 $DH = DG$. 又

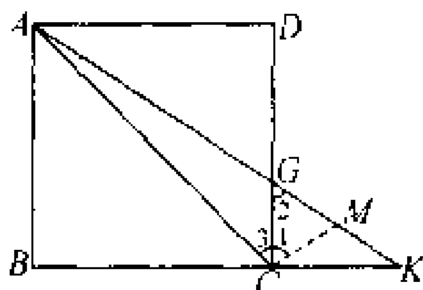
$$EH = AC - (AE + HC) = BC - (CF + GB) = FG.$$

所以$\triangle DEH \cong \triangle DFG$，有$\angle EDH = \angle FDG$.

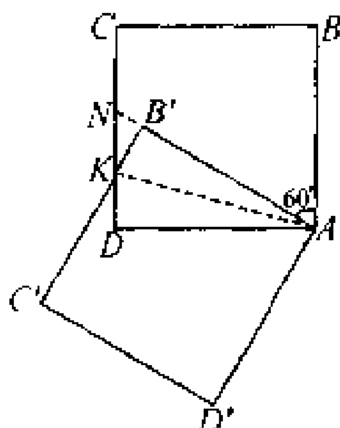
4.**证明**　如图，取 GK 中点 M，则 $AM = \frac{1}{2}(AK + AG)$. 连结 CM. 在 Rt$\triangle GCK$ 中，$MC = \frac{1}{2}GK = MG$，$\angle 1 = \angle 2$. 又$\angle 2 > \angle 3 = 45°$，故$\angle 1 > 45°$. 于是$\angle ACM >$

90°.在△ACM 中，∠ACM > ∠AMC，故

$$AM=\frac{1}{2}(AK+AG)>AC.$$



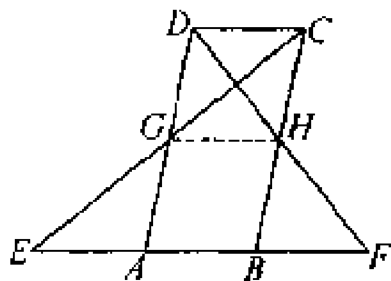
（第4题）



（第5题）

5.解　延长 AB'，交 CD 于 N. 连结 AK（如图），因 $AB'=AD$，故 $\mathrm{Rt}\triangle AB'K\cong\mathrm{Rt}\triangle ADK$，有 $B'K=KD$. 因 $AB\parallel CD$，所以 $\angle KNB'=\angle NAB=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle KNB'$ 中，$\angle NKB'=30°$，$NB'=\frac{1}{2}NK$，根据勾股定理 $NK^2=B'K^2+B'N^2$，所以 $NK=\frac{2\sqrt{3}}{3}B'K=\frac{2\sqrt{3}}{3}DK$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle KDA$ 中，$\angle NAD=30°$. 同样可得 $DN=\frac{\sqrt{3}}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以$\frac{2\sqrt{3}}{3}DK+DK=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $DK=2-\sqrt{3}$. 于是重叠部分面积为

$$2\times\frac{1}{2}\times1\times(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}.$$



（第6题）

6.证明　如图，设 CE、DF 分别交 AD、BC 于 G、H，连结 GH. 因四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 $AB\underline{\parallel}CD$，$BC\underline{\parallel}AD$，$\angle E=\angle DCE$.

在△GCD 和△GEA 中，$AE=CD$，$\angle DCE=\angle E$，$\angle CDG=\angle EAG$，故△$GCD\cong$△GEA，$DG=GA$. 又 $AD=2AB$，所以 $DG=DC$. 同理 $HC=DC$，即 $HC=DG$，四边形 $HCDG$ 为平行四边形. 因 $DC=DG$，故四边形 $HCDG$ 为菱形，$CE\perp DF$.

7.解　(1) 设 $AE=x$，则 $EC=2-x$. 又 EF 垂直平分 AD，所以 $ED=EA=x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 中，根据勾股定理，有

$$x^2=(2-x)^2+(\sqrt{2})^2,$$

解得 $x=\frac{3}{2}$,即 $AE=\frac{3}{2}$.

(2)当 $CD=2\sqrt{2}-2$ 时,设 $AE=x$.根据勾股定理,有 $CE^2+CD^2=DE^2$,即

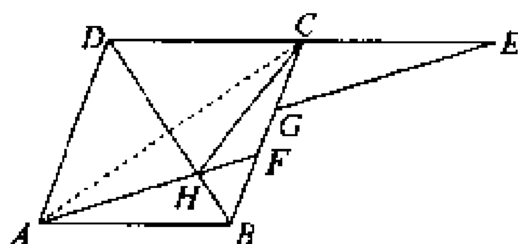
$$x^2=(2-x)^2+(2\sqrt{2}-2)^2,$$

解得 $x=4-2\sqrt{2}$.于是 $EC=2-x=2\sqrt{2}-2$.所以 $EC=CD$,有 $\angle CED=\angle CAB=45°$,可知 $ED/\!/AB$,故 $\angle AFE=\angle FED$. 又 EF 垂直平分 AD,有 $AF=DF$,$\angle EFD=\angle AFE=\angle FED$,故 $ED=FD$,于是 $AE=ED=FD=AF$,四边形 $AEDF$ 是菱形.

8. **证明** 连结 AC. 因四边形 $ABCD$ 是菱形,故 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD$,又 $\angle FAB=\frac{1}{4}\angle BAD$,所以 $\angle BAF=\angle FAC$. 因 BD 垂直平分 AC,所以 $AH=CH$. 于是

$\angle FHC=\angle HAC+\angle HCA=2\angle HAC=2\angle FAB$.

又 $AB/\!/CD$,有 $\angle ECG=\angle ABF$ 且 $CG=BF$,

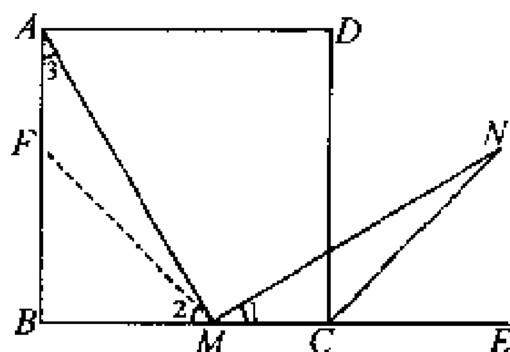


(第 8 题)

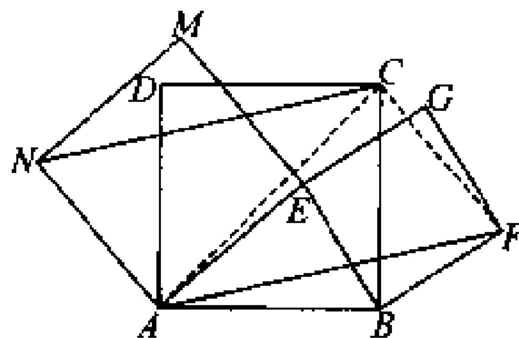
$CE=CD=AB$,所以 $\triangle CEG\cong\triangle BAF$,有 $\angle CEG=\angle BAF$. 于是 $\angle FHC=2\angle CEG$.

9. **证明** 如图,在 AB 上截取 $AF=MC$,连结 FM. 又 $AB=BC$,故 $BM=BF$. 因 $\angle B=90°$,所以 $\angle FMB=45°$,$\angle AFM=135°$. 因 CN 平分 $\angle ECD$,故 $\angle MCN=135°$. 由 $AM\perp MN$,所以 $\angle 1+\angle 2=90°$,又 $\angle 2+\angle 3=90°$,故 $\angle 1=\angle 3$.

在 $\triangle AFM$ 和 $\triangle MCN$ 中,$\angle 1=\angle 3$,$AF=MC$,$\angle AFM=\angle MCN$,所以 $\triangle AFM\cong\triangle MCN$,$AM=MN$.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. **证明** 连结 CF、AC(如图). 因 $\angle NAD+\angle DAE=\angle DAE+\angle EAB=90°$,故 $\angle NAD=\angle EAB$. 同理 $\angle EBA=\angle FBC$,又 $AB=CB$,$FB=FB$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle CBF$. 有 $AE=CF$,$\angle EAB=\angle FCB$. 于是

$$\angle NAC=\angle NAD+\angle DAC=\angle FCB+\angle BCA=\angle FCA.$$

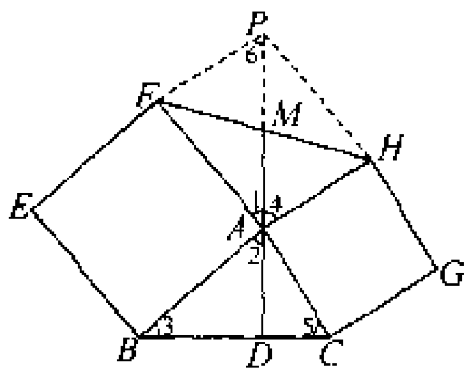
可知 $AN /\!/ CF$. 又 $AN=AE=CF$,所以四边形 $ANCF$ 为平行四边形,有 $NC /\!/ AF$.

11.**解** 连结 AC. 因四边形 $ABCD$ 是菱形,故 $AB=BC$,$\angle ACB=\angle ACF$. 又 $\angle B=60°$,所以$\triangle ABC$ 是等边三角形,$\angle BAC=\angle ACB=60°$,$AB=AC$,进而知 $\angle ACF=60°$. 因$\angle BAC=\angle EAF=60°$,所以$\angle BAE=\angle CAF$,$\triangle ABE\cong\triangle ACF$,有 $AE=AF$. $\triangle AEF$ 为等边三角形. $\angle AEF=60°$. 因

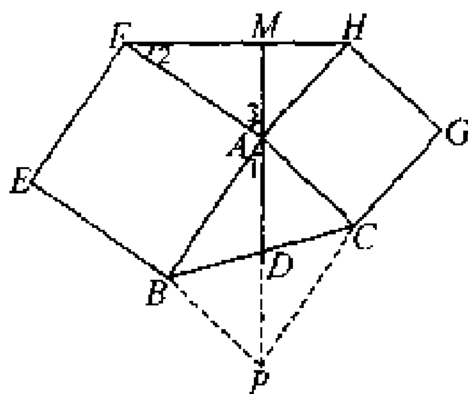
$$\angle AEC=\angle AEF+\angle CEF=\angle B+\angle BAE=60°+15°=75°,$$

所以$\angle CEF=15°$.

12.**证明** (1)作 $FP /\!/ AH$,交 AM 的延长线于 P,连结 PH(如图(1)),则$\angle 4=\angle 6$. 又$\angle 2+\angle 3=90°$,$\angle 2+\angle 1=180°-\angle BAF=90°$,故$\angle 3=\angle 1$. 同理$\angle 5=\angle 4$. 所以$\angle 5=\angle 6$. 因为 $AB=AF$. 故$\triangle ABC\cong\triangle FAP$,有 $AC=FP$. 而 $AC=AH$,所以 $AH=FP$,四边形 $AHPF$ 为平行四边形,于是 AD 平分 FH.



(第 12 题)(1)



(第 12 题)(2)

(2)延长 AD 至 P,使得 $DP=AD$. 连结 PB、PC(如图(2)). 由 AD 平分 BC 知四边形 $ABPC$ 为平行四边形,有 $BP=AC=AH$,$\angle PBA+\angle BAC=180°$. 又

$$\angle FAH+\angle BAC=360°-\angle BAF-\angle CAH=180°,$$

所以$\angle PBA=\angle HAF$. 又 $AB=AF$,所以$\triangle ABP\cong\triangle FAH$,$\angle 1=\angle 2$. 于是

$$\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3=180°-\angle BAF=90°,$$

即 $AD\perp FH$.

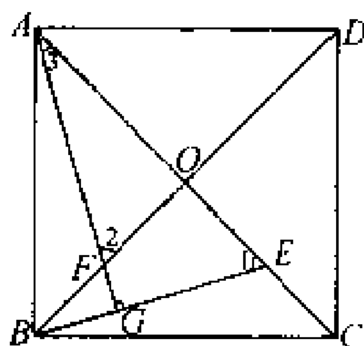
13.**解** (1)如图(1),在正方形 $ABCD$ 中,$\angle BOE=\angle AOF=90°$,$AO=BO$,且 $AG\perp EB$,故$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=90°$,有$\angle 1=\angle 2$,$Rt\triangle BOE\cong Rt\triangle AOF$,所以 $OE=OF$.

(2)结论仍然成立. 如图(2)所示. $\angle BOE=\angle AOF=90°$,$BO=AO$. 又 $AG\perp$

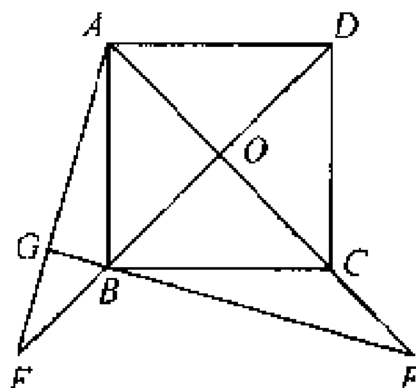
EB，有

$$\angle OEB + \angle EAF = \angle OFA + \angle FAE = 90^\circ,$$

所以$\angle OEB = \angle OFA$，Rt$\triangle BOE \cong$ Rt$\triangle AOF$，有 $OE = OF$.



(第 13 题)(1)



(第 13 题)(2)

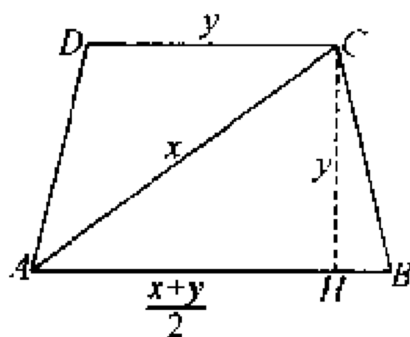
练习十九

1. 设下底为 x，上底为 y. 作高 CH. 则 $CH = y$，$AH = \frac{1}{2}(x + y)$(如图)，于是

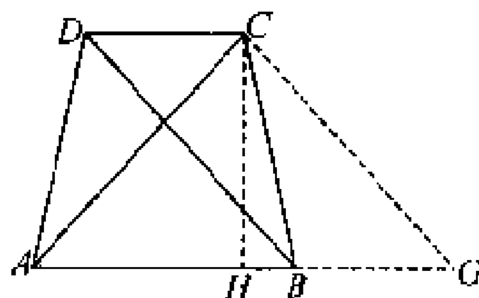
$$x^2 = y^2 + (\frac{x + y}{2})^2,$$

化简得
$$3x^2 - 2xy - 5y^2 = 0,$$
即
$$(3x - 5y)(x + y) = 0.$$

因 $x + y > 0$，故 $3x - 5y = 0$，即$\frac{y}{x} = \frac{3}{5}$. 选(D).



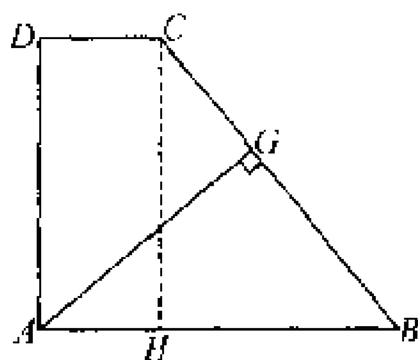
(第 1 题)



(第 2 题)

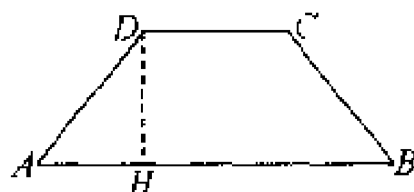
2. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$. 作 $CG // BD$，交 AB 延长线于 G，则 $AC = CG$，$AC \perp CG$，即$\triangle ACG$ 为等腰直角三角形. 作 $CH \perp AB$，交 AB 于 H，CH 为梯形高. 于是 $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AB + CD)$，即 $h = m$. 选(B).

3. 作 $CH\perp AB$，交 AB 于 H（如图）. 易知四边形 $AHCD$ 为矩形. 因 $AB=BC$，故 Rt△AGB≌Rt△CHB，有 $BH=BG$，于是 $\frac{CD}{AB}=\frac{AH}{AB}=\frac{1}{3}$. 选(B).

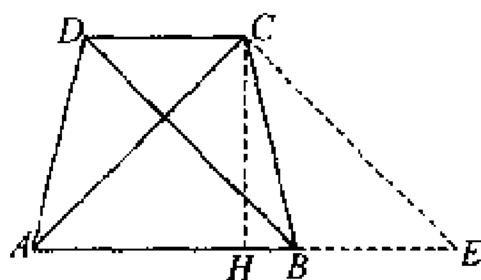


（第 3 题）

4. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel BC$. 因 $\angle C+\angle A=180°$，又 $\angle C+\angle B=180°$，所以 $\angle A=\angle B$，梯形为等腰梯形. 作 $DH\perp AB$，交 AB 于 H. 因 $\angle A+\angle ADC=\angle A+3\angle A=180°$，故 $\angle A=45°$. 于是 $DH=AH=\frac{b-a}{2}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

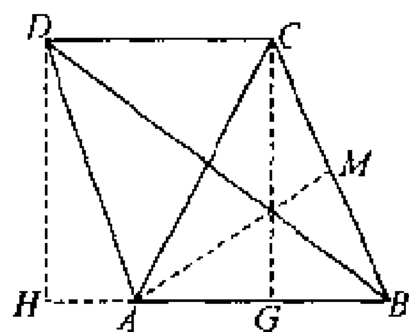
5. 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel CD$. 作 $CE\parallel DB$，交 AB 延长线于 E. 作 $CH\perp AB$，垂足 H，则 $AC=CE=17$，$AE=AB+CD=30$，$AH=15$. 于是 $CH=\sqrt{17^2-15^2}=8$，$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot CH=\frac{1}{2}\times30\times8=120$.

6. 连结 AE，设 AE 与 DC 交于 O，则 $OA=OE$. 因 $DF\parallel AB$，故 $EF=FB$，有 $EF:FB=1:1$.

7. 作 CG、DH 垂直于 AB，垂足 G、H，因 $CD\parallel AB$，故 $DH=CG$. 作 $AM\perp BC$，垂足为 M. 因 $AB=AC$，故 $BM=MC$. 由 $BC=2$ 得 $BM=1$. 于是 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=2$，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AM\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CG,$$

即 $2\times2=\sqrt{5}\cdot CG$，可得 $CG=\frac{4}{\sqrt{5}}$.



（第 7 题）

在 Rt△ADH 中，$DH=CG=\frac{4}{\sqrt{5}}$，$AD=\sqrt{5}$，则 $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

在 Rt△BDH 中，$BD=\sqrt{DH^2+BH^2}=\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{5}})^2+(\frac{3}{\sqrt{5}}+\sqrt{5})^2}=4$.

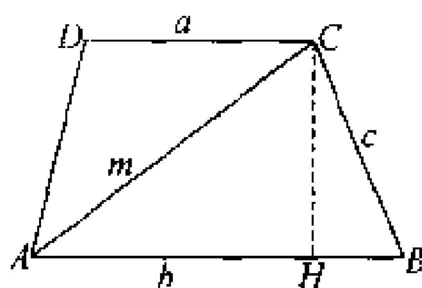
8.**证明**　ED 为△ABC 中位线，有 $ED \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$. 又 $DF \parallel EC$，知四边形 $ECFD$ 是平行四边形，故 $DF=EC$.

在 Rt△ACB 中，$CE=\frac{1}{2}AB=BE$. 于是 $DF=BE$.

由 $EC \parallel DF$、EC 与 EB 相交于 E，知 EB 与 DF 不平行．否则过直线 DF 外一点 E 可作两条直线 EC、EB 与 DF 平行，与平行公理矛盾.

综上所述，四边形 $EBFD$ 是等腰梯形.

9.**证明**　连结 DN. 因 MN 是线段 CD 的垂直平分线，故 $CN=DN$. 因 $AD \parallel BC$，$\angle ADC=135°$，知$\angle C=45°$，从而有$\angle NDC=45°$，$\angle ADN=90°$. 注意到$\angle A=\angle ABC=90°$，所以四边形 $ABND$ 为矩形，$AF \parallel ND$. 于是$\angle F=45°$，从而可知△BFN 为等腰直角三角形，$BF=BN$. 所以 $AD=BF$.



（第 10 题）

10.**证明**　如图，过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H. 因四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，所以 $BH=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}(b-a)$.

在 Rt△AHC 中

$$CH^2=AC^2-AH^2=AC^2-(AB-BH)^2=m^2-(b-\frac{b-a}{2})^2=m^2-(\frac{a+b}{2})^2. \quad ①$$

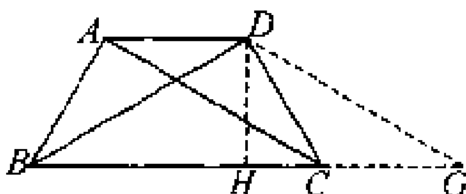
同理　$CH^2=c^2-(\frac{a-b}{2})^2$. 　②

由①，②得

$$m^2-(\frac{a+b}{2})^2=c^2-(\frac{a-b}{2})^2.$$

化简得　$m^2=c^2+ab$.

11.**证明**　如图，作 $DG \parallel AC$，交 BC 延长线于 G. 因 $AD \parallel BC$，故四边形 $ACGD$ 为平行四边形，$CG=AD$，$AC=DG$. 设 $AD=a$，$BC=b(b>a)$，则 $BG=a+b$. 作 $DH \perp BG$，垂足 H. 设 $DH=h$，因 $AC=BD$，$AC=DG$，所以 $BD=DG$，H 为 BG 中点，$CH=$



（第 11 题）

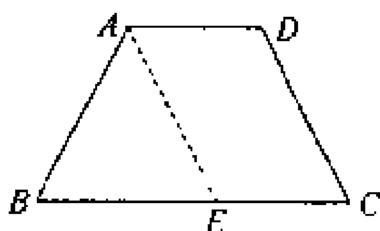
$b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$.在 Rt△$DCH$ 中,

$$CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2+h^2}.$$

同理　　$AB=\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2+h^2}$.

因此　　$AB=CD$.

12.**解**　如图,过 A 作 $AE /\!/ DC$,则四边形 $ADCE$ 为平行四边形.



(第 12 题)

如果梯形的上、下底分别为 4 和 5,即 $AD=4$, $BC=5$,则 $BE=BC-AD=1$, $AE=DC$,△ABE 的三边分别是 1,1,4,但 $1+1<4$ 不可能构成三角形.

因此梯形的上、下底只可能是 1 和 5 或 1 和 4.

(i)若 $AD=1$, $BC=5$,则 $AB=DC=4$,所以梯形 $ABCD$ 为等腰梯形.由 $BE=4$, $AE=CD=4$,知△ABE 为等边三角形.梯形的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$,梯形的面积为

$$\frac{1}{2}(1+5)\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}.$$

(ii)若 $AD=1$, $BC=4$,不妨设腰 $AB=4$, $DC=5$,则 $BE=BC-AD=3$, $AE=DC=5$, $AB^2+BE^2=4^2+3^2=5^2=AE^2$.所以△$ABE$ 为直角三角形,$AB\perp BC$.梯形 $ABCD$ 为直角梯形,面积为

$$\frac{1}{2}(1+4)\times 4=10.$$

于是面积最小的梯形是直角梯形($AD=1$, $BC=4$),两对角线的长分别是

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{2},$$

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{17}.$$

对角线长度之和为 $4\sqrt{2}+\sqrt{17}$.

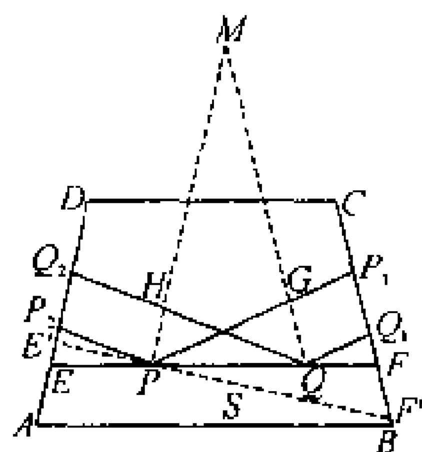
13.**证明**　如图,在梯形 $ABCD$ 中,$DC /\!/ AB$.设 P、Q 为满足条件的两个点,作 $PP_1\perp BC$, $QQ_1\perp BC$, $PP_2\perp AD$, $QQ_2\perp AD$.由于梯形内任一点到两底距离之和为定值,所以得

$$PP_1+PP_2=QQ_1+QQ_2.$$

作 $PM /\!/ AD$, $QM /\!/ BC$.设 PM 交 QQ_2 于 H, QM 交 PP_1 于 G,由题设知

$$|PP_1-QQ_1|=|QQ_2-PP_2|,$$

即 $PG=QH$. 所以 $\triangle MPQ$ 为等腰三角形，$\angle MPQ=\angle MQP$.



(第 13 题)

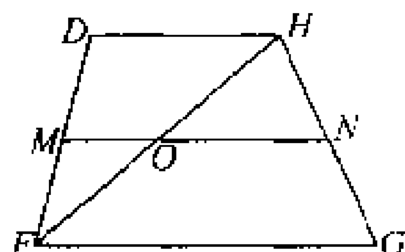
连结 PQ 交 AD、BC 于 E、F，显然有 $\angle DEF=\angle MPQ$，$\angle CFE=\angle MQP$，故 $\angle DEF=\angle CFE$. 即过满足已知条件的两点 P、Q 的直线与梯形两腰夹等角.

设 S 为梯形 $ABCD$ 内不在直线 PQ 上的任意一点，且 S 到两腰距离之和等于 PP_1+PP_2. 连接 P、S，并延长交 DA、BC 于 E'、F'，仿上可证得 $\angle DE'F'=\angle CF'E'$.

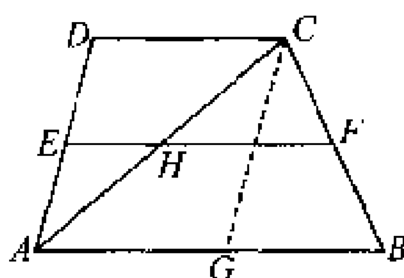
由三角形外角定理得 $\angle DE'F'>\angle DEF=\angle CFE>\angle CF'E'$，矛盾. 即证明了点 S 必在直线 PQ 上. 因此，所设 n 个点均在同一直线上.

练习二十

1. 如图，设 $ON=x$，$OM=y$，则 $x+y=25$，$x-y=5$，解得 $x=15$，$y=10$. 即 $OM=10$，$ON=15$. 因 $EH/\!/MN/\!/FG$，故 OM 是 $\triangle FHE$ 的中位线，$OM=\frac{1}{2}EH$. 于是，$EH=2OM=20(\text{cm})$.



(第 1 题)



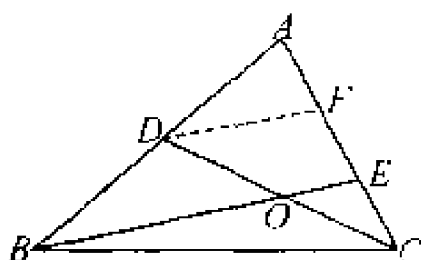
(第 2 题)

2. 过 C 作 $CG/\!/AD$，交 AB 于 G. 因 $AB/\!/CD$，故四边形 $AGCD$ 为平行四边形，有 $AG=CD$，$AD=GC$. 因 EF 为梯形 $ABCD$ 的中位线，所以 $EH=\frac{1}{2}CD$，$HF=\frac{1}{2}AB$. 因 $EH=4$，$HF=10$，所以 $CD=8$，$AB=20$. 进而知 $AG=8$. $BC=GC=GB=12$，可知 $\angle B=60°$. 于是 $\angle DAB=60°$，$\angle D=120°$.

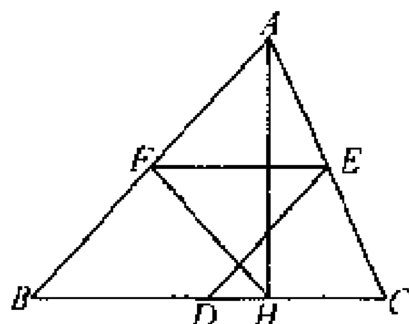
3. 取 AE 中点 F，连结 DF，则 $AF=FE$. 又 $AD=DB$，故 DF 是 $\triangle ABE$ 中位线，$DF \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BE$. 又 $AE=2CE$，故 $EF=CE$，所以 $EO \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}DF$. 于是 $OE=\frac{1}{2}DF$

$=\frac{1}{4}BE$，可得 $BO=3OE=6$(厘米).

4. **证明** 因 $AB=BD$、$BM\perp AD$，BM 公共. 故 $\text{Rt}\triangle ABM\cong\text{Rt}\triangle DBM$，$M$ 为 AD 中点. 又 N 是 AC 中点，所以 MN 是 $\triangle ADC$ 的中位线，$CD=2MN$.



(第 3 题)



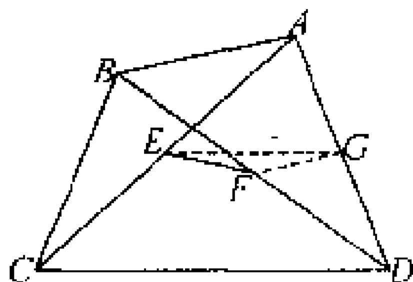
(第 5 题)

5. **证明** 因 EF、DE 均为 $\triangle ABC$ 的中位线，故 $EF/\!/BC$，$DE/\!/AB$，四边形 $BDEF$ 为平行四边形，$\angle DEF=\angle B$，$\angle EFH=\angle FHB$. 又 HF 为 $\text{Rt}\triangle AHB$ 斜边上的中线，$HF=\frac{1}{2}AB=BF$. 有 $\angle FHB=\angle B$. 所以 $\angle DEF=\angle HFE$.

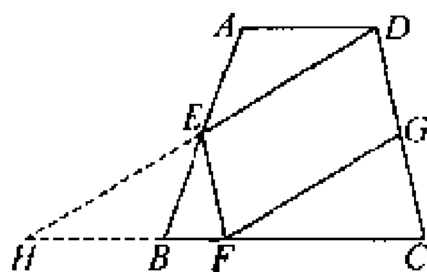
6. **证明** 取 AD 中点 G，连结 EG、FG. 因 E、F 分别为 AC、BD 中点，故 $EG=\frac{1}{2}CD$. $GF=\frac{1}{2}AB$. 因 $EF\geqslant|EG-GF|$，且 $CD>AB$，所以 $EF\geqslant\frac{1}{2}(CD-AB)$.

7. **解** 依题设，EG、EF 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 的中位线，$EG=\frac{1}{2}BC$，$EF=\frac{1}{2}AD$. 因 $AD+EF=12$(cm)，故 $EF=4$(cm)，$AD=8$(cm)，则 $EG=\frac{3}{2}EF=6$(cm)，进而有 $BC=12$(cm). 所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48(\text{cm}^2).$$



(第 6 题)



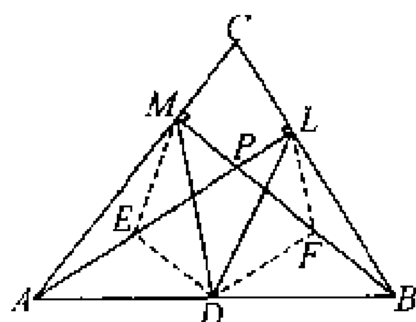
(第 8 题)

8. **证明** 延长 DE、CB 交于 H(如图). 因 $AE=EB$，$AD/\!/BC$，故 $DE=EH$. 又 $EF/\!/DC$，所以 $HF=FC$. 又 $FG/\!/HD$，所以 $DG=GC$，即 G 为 CD 的中点.

9. **证明** $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 依次是 $\triangle APB$、$\triangle BPQ$、$\triangle AQB$、$\triangle APQ$ 的中

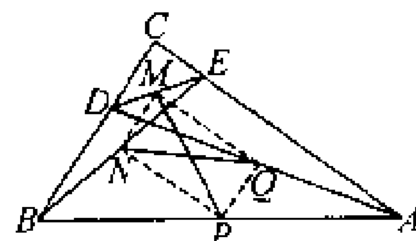
位线，从而 $A'B' \parallel AB$，$B'C' \parallel PQ$，$C'D' \parallel AB$，$D'A' \parallel PQ$．所以，四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形．由于四边形 $ABCD$ 是矩形，四边形 $PCBQ$ 是平行四边形，所以 $AB \perp BC$，$BC \parallel PQ$，从而 $AB \perp PQ$．所以 $A'B' \perp B'C'$，四边形 $A'B'C'D'$ 是矩形，有 $A'C' = B'D'$．

10．**证明**　设 E、F 为 AP、BP 的中点．连结 DE、DF、EM、FL（如图），因 $DF = \frac{1}{2}AP = ME$，$DE = \frac{1}{2}BP = FL$，且 $DF \parallel EP$，$DE \parallel PF$，故四边形 $DEPF$ 为平行四边形，$\angle DEP = \angle DFP$．又 $\angle PEM = 2\angle PAC = 2\angle PBC = \angle PFL$，所以 $\triangle DEM \cong \triangle LFD$，有 $DM = DL$．



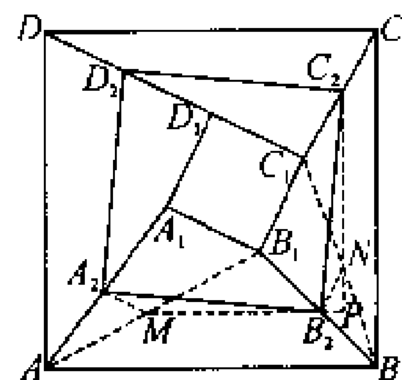
（第 10 题）

11．**证明**　顺次连结 M、N、P、Q．在 $\triangle BDE$ 中，$MN \parallel BD$．在 $\triangle BDA$ 中，$PQ \parallel BD$．故 $MN \parallel PQ$．同理 $MQ \parallel AE$，$PN \parallel AE$．所以 $MQ \parallel PN$，四边形 $MNPQ$ 为平行四边形．又 $AC \perp BC$，故 $MN \perp MQ$．因此，四边形 $MNPQ$ 为矩形，有 $MP = NQ$．



（第 11 题）

12．**证明**　连结 AB_1，设 M 为 AB_1 的中点，连结 BC_1，设 N 为 BC_1 的中点，连结 A_2M、B_2N、MB_2、C_2N（如图）．



（第 12 题）

因 $B_2M = C_2N = \frac{1}{2}AB$，$A_2M = B_2N = \frac{1}{2}A_1B_1$，又 $A_2M \parallel A_1B_1$，$B_2N \parallel B_1C_1$，$A_1B_1 \perp B_1C_1$．所以 $A_2M \perp B_2N$．同理 $B_2M \perp C_2N$．于是 $\angle A_2MB_2 = \angle B_2NC_2$，$\triangle A_2MB_2 \cong \triangle B_2NC_2$．可得 $A_2B_2 = B_2C_2$．

延长 MB_2、C_2N 相交于 P，有

$$\angle A_2B_2C_2 = \angle MB_2C_2 - \angle MB_2A_2.$$

又
$$\angle MB_2C_2 = \angle P + \angle NC_2B_2,$$

但 $\angle P = 90°$ 且 $\angle MB_2A_2 = \angle NC_2B_2$，所以 $\angle A_2B_2C_2 = 90°$．

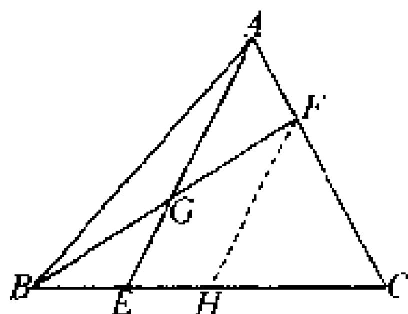
同理可证，$B_2C_2 = C_2D_2$ 且 $\angle B_2C_2D_2 = 90°$．

因此，四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是正方形．

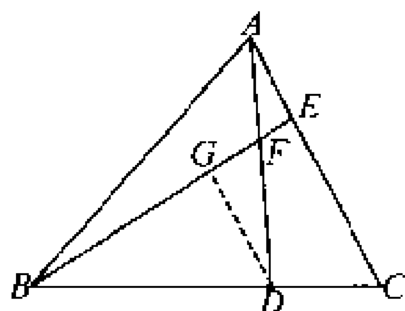
练习二十一

1.如图,过 F 作 $FH // AE$ 交 BC 于 H.因 $BG=GF$,故 $BE=EH$.又 $AF:FC=1:2$,所以 $\frac{CF}{FA}=\frac{CH}{HE}=\frac{2}{1}$,所以 $CH=2HE$.于是

$$\frac{BE}{EC}=\frac{BE}{EH+HC}=\frac{BE}{HE+2HE}=\frac{BE}{3EH}=\frac{1}{3}.$$



(第1题)



(第2题)

2.过 D 作 $DG // AC$,交 BE 于 G,则 $\frac{AE}{DG}=\frac{AF}{FD}$.因 $\frac{AE}{EC}=\frac{2}{3}$①,且 $\frac{DC}{BD}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{DG}{EC}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{4}$.于是 $\frac{EC}{DG}=\frac{4}{3}$②.①,②相乘,即得 $\frac{AF}{FD}=\frac{8}{9}$.

3.因 $AB // CD$,故 $\frac{EA}{CJ}=\frac{EH}{HJ}=\frac{3}{2}$,$\frac{EB}{CJ}=\frac{EI}{IJ}=4$.于是

$$AB=EB-EA=4CJ-\frac{3}{2}CJ=\frac{5}{2}CJ.$$

又 $\frac{EB}{DJ}=\frac{EG}{GJ}=\frac{2}{3}$,所以 $EB=\frac{2}{3}DJ=4CJ$,有 $DJ=6CJ$.于是 $CD=DJ-CJ=5CJ$,而 $AB=\frac{1}{2}CD$,故 $\frac{DC}{AB}=2$.

4.证明　因 $MN // AD$,$AD // BC$,故 $MN // BC$,有 $\frac{PM}{AD}=\frac{BP}{BD}$,$\frac{PN}{BC}=\frac{PD}{BD}$.相加得

$$\frac{PM}{AD}+\frac{PN}{BC}=1. \quad ①$$

同理

$$\frac{PN}{AD}+\frac{PM}{BC}=1. \quad ②$$

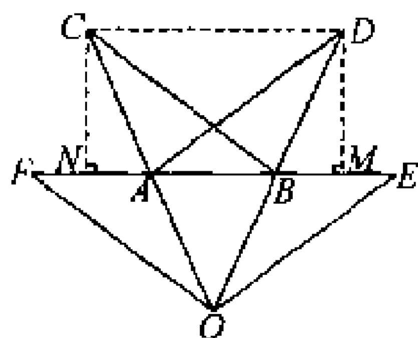
①+②得

$$\frac{MN}{AD}+\frac{MN}{BC}=2.$$

即
$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{MN}.$$

5.**证明** 设正方形 $ABDE$ 的边长为 a，正方形 $ACFG$ 的边长为 b. 因 $AM//DE$，故 $\frac{AM}{DE}=\frac{CA}{CE}$，即 $\frac{AM}{a}=\frac{b}{a+b}$，即 $\frac{AM}{b}=\frac{a}{a+b}$ ①. 同理 $\frac{AN}{b}=\frac{a}{a+b}$ ②，比较①，②得 $AM=AN$.

6.**证明** 因 $AD//OE$，故
$$\frac{BE}{BA}=\frac{OB}{BD}. \qquad ①$$
又 $OF//BC$，有
$$\frac{AF}{AB}=\frac{OA}{AC}. \qquad ②$$



（第6题）

连结 CD，作 DM、CN 分别垂直 EF，垂足 M、N（如图），因 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$，可得 $DM=CN$，于是 $CD//AB$. 所以
$$\frac{OB}{BD}=\frac{OA}{AC}. \qquad ③$$

由①，②，③得
$$\frac{BE}{AB}=\frac{AF}{AB}.$$
所以 $BE=AF$. 进而得 $AE=BF$.

7.**解** (1)因 $AB//CD$，故 $\frac{CE}{AE}=\frac{CD}{MA}$，$\frac{CF}{FM}=\frac{CD}{MB}$. 又 $MA=MB$，故 $\frac{CE}{EA}=\frac{CF}{FM}$. 所以 $EF//AB//CD$.

(2) 由(1)知 $EF//AB//CD$，故 $\frac{EF}{AM}=\frac{CF}{CM}$，$\frac{EF}{CD}=\frac{MF}{MC}$，相加得
$$\frac{EF}{AM}+\frac{EF}{CD}=\frac{CF}{CM}+\frac{MF}{CM}=1,$$
即
$$\frac{EF}{\frac{a}{2}}+\frac{EF}{b}=1.$$
由此可得 $EF=\frac{ab}{a+2b}$.

8.**证明** 因 $DE//BC$，DC 平分 $\angle EDF$，故 $\angle CDF=\angle GDC=\angle DCF$，可知 $DF=FC$. 又 $AD=AC$，所以 AF 是 DC 的垂直平分线，则 $\angle DKG=\angle DKF=90°$，Rt$\triangle DKG\cong$Rt$\triangle DKF$，可得 $DG=DF$. 因 $DE//BC$，所以 $\frac{BF}{DF}=\frac{BF}{DG}=\frac{AF}{AG}=\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AE}$.

9. **证明** 因 $AD // EG$，故 $\frac{GE}{AD}=\frac{BE}{BD}$，$\frac{EF}{AD}=\frac{CE}{CD}$. 相加得

$$\frac{GE+EF}{AD}=\frac{BE}{BD}+\frac{CE}{CD}=2.$$

于是

$$\frac{BD+DE}{BD}+\frac{CD-DE}{CD}=2.$$

即得 $BD=CD$. 故 AD 是△ABC 的中线.

10. **证明** 因 AD 是等腰△ABC 底边 BC 上的高，故 AD 是 BC 垂直平分线，有 $BN=NC$，$\angle NBC=\angle NCB$. 于是

$$\angle ENB=\angle NBC+\angle NCB=2\angle NBC=\angle EBN.$$

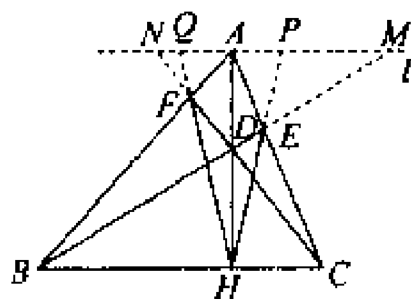
可得 $BE=EN$.

因 AN 平分 $\angle EAC$，故 $\frac{AE}{AC}=\frac{EN}{NC}$. 于是

$$\frac{AE}{EN}=\frac{AC}{NC}=\frac{AB}{BN}=\frac{AM}{MN}.$$

11. **证明** 如图，过 A 作直线 $l // BC$，延长 BE、CF 分别交 l 于 M、N. 延长 HE、HF 分别交 l 于 P、Q，则 $\frac{AE}{EC}=\frac{AM}{BC}=\frac{AP}{HC}$. 于是 $AP=\frac{AM\cdot HC}{BC}$. 同理 $AQ=\frac{AN\cdot BH}{BC}$. 故

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{AM\cdot HC}{AN\cdot BH}=\frac{AM}{BH}\cdot\frac{HC}{AN}. \qquad ①$$



(第 11 题)

因 $\frac{AM}{BH}=\frac{AD}{DH}$，$\frac{HC}{AN}=\frac{DH}{AD}$，代入①得 $AP=AQ$. 又 $AH\perp BC$，有 $AH\perp PQ$，故 $HP=HQ$. 所以 $\angle AHQ=\angle AHP$，即 $\angle AHE=\angle AHF$.

12. **解** 如图，过 M 作 $ME // AB$，$MF // AC$，分别交于 BC 于 E、F. 设 $ED=t$，$ME=s$，则

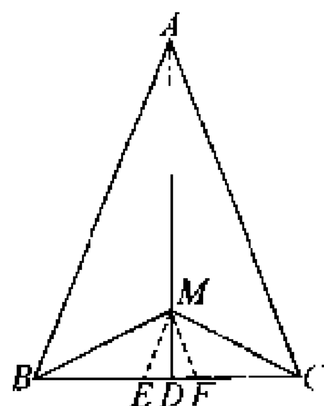
$$\frac{BD}{ED}=\frac{AD}{MD}=\frac{5}{1},$$

所以 $BD=5t$. 又易知 ME 平分 $\angle BMF$，可得

$$\frac{BM}{MF}=\frac{BE}{EF}=\frac{4t}{2t}=\frac{2}{1}.$$

所以

$$BM=2MF=2ME=2s.$$



(第 12 题)

根据勾股定理，有

$$BM^2-BD^2=4s^2-25t^2=1, \qquad ①$$

$$ME^2 - ED^2 = s^2 - t^2 = 1. \quad ②$$

由①,②可得 $t = \frac{\sqrt{7}}{7}, s = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.

因 $EF = \frac{1}{5}BC, ME = \frac{1}{5}AB, MF = \frac{1}{5}AC$,故

$$\triangle ABC \text{ 的周长} = 5 \times \triangle MEF \text{ 的周长} = 10(s + t)$$

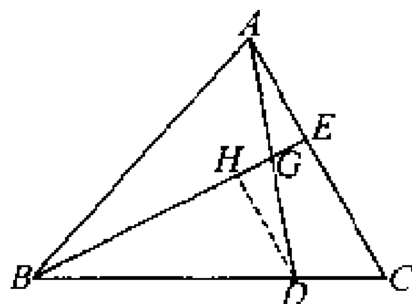
$$= \frac{10}{7}(\sqrt{7} + 2\sqrt{14}) = \frac{10\sqrt{7} + 20\sqrt{14}}{7}.$$

练习二十二

1. 面积的比为2:1.相似比为$\sqrt{2}:1$,即为矩形长与宽的比,选(C).

2. 因 $EF \parallel BC, FD \parallel AB$,故 $BE:EA = FC:FA = CD:DB = 2:3$,选(C).

3. 过 D 作 $DH \parallel AC$,交 BE 于 H(如图),则 $BH:HE = BD:DC = 3:1$. 设 $HE = m$,则 $BH = 3m$. 因 $AG = GD$,故 $HG:GE = DG:GA$.所以 $HG = GE = \frac{1}{2}HE = \frac{1}{2}m$.进而可得 $BG:GE = \frac{7}{2}m:\frac{1}{2}m = 7:1$.



(第3题)

4. 因$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}$,故 $DF \parallel BC$. 又$\frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}$,故 $EF \parallel BC$. 所以 $\triangle AFE \backsim \triangle ABC$, $\triangle BDF \backsim \triangle BCA$.故

$$\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

于是

$$\frac{S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

即$\frac{S_{\square DCEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$,因 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}S_{\square DCEF}$,所以$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{9}$,即 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF} = 9:2$.

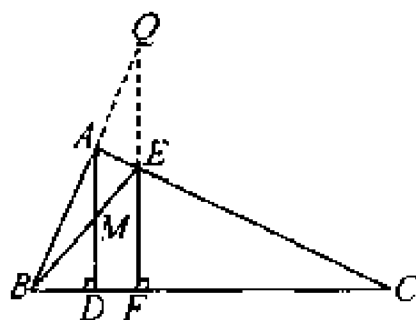
5. 延长 FE 与 BA 的延长线交于 Q,则 $Rt\triangle AEQ \backsim Rt\triangle FEC$,有

$$\frac{AE}{FE} = \frac{EQ}{EC},$$

即 $FE \cdot EQ = AE \cdot EC$.

因 $AD // QF$, $AM = MD$, 所以

$\frac{AM}{QE} = \frac{BM}{BE} = \frac{MD}{EF}$. 于是 $EQ = EF$. 因 $EQ \cdot FE = AE \cdot EC$, 所以 $EF^2 = AE \cdot EC = 3 \times 12 = 36$, 得 $EF = 6$.



(第 5 题)

6. 因 $\angle B = 60°$, $\angle AEB = \angle BDC = 90°$, 故 $\angle BAE = \angle BCD = 30°$.

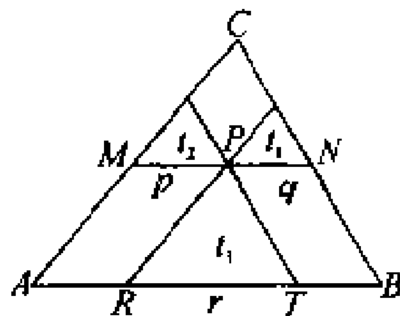
在 Rt$\triangle ADF$ 中, $DF = \frac{1}{2}AF$. 同理 $EF = \frac{1}{2}FC$.

故 $\frac{DF}{AF} = \frac{EF}{FC}$. 又 $\angle DFE = \angle AFC$, 所以 $\triangle DFE \backsim \triangle AFC$, 有 $DE : AC = 1:2$.

7. 过 O 作 $OG // BC$, 交 AB 于 G. 因 $AO = OC$, 故 $AG = GB = \frac{1}{2}a$, $OG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}b$. 因 $BF // OG$, 故 $\triangle BEF \backsim \triangle GEO$, $\frac{BF}{OG} = \frac{BE}{GE}$.

所以
$$BF = \frac{OG \cdot BE}{GE} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot c}{\frac{1}{2}a + c} = \frac{bc}{a + 2c}.$$

8. 设 $MP = p$, $PN = q$, $RT = r$. 由于三角形 t_1、t_2、t_3 都和 $\triangle ABC$ 相似, 故它们面积的算术平方根之比等于相似比. 设 $AB = c$, $\triangle ABC$ 的面积为 S. 则 $\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{q}{c}$, $\frac{3}{\sqrt{S}} = \frac{p}{c}$, $\frac{7}{\sqrt{S}} = \frac{r}{c}$ 三式相加, 有



(第 8 题)

$$\frac{2+3+7}{\sqrt{S}} = \frac{p+q+r}{c} = \frac{AR + RT + TB}{c} = \frac{AC}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

故 $\sqrt{S} = 12$, 得 $S = 144$.

9. **证明** (1) 因 $\angle ACB = 90°$, 且 $CD \perp AB$, 故 $\angle ACD + \angle A = \angle BCD + \angle ACD$, 故 $\angle A = \angle BCD$. 同理在 Rt$\triangle MDB$ 中, $\angle MDH = \angle DBH$. 又 $\angle ADE = 90° + \angle CDE$, $\angle CMB = 90° + \angle MBD$, 于是 $\angle ADE = \angle CMB$. 在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CBM$ 中, $\angle A = \angle BCM$, $\angle ADE = \angle CMB$, 故 $\triangle AED \backsim \triangle CBM$.

(2) 由 (1) 得 $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{CM}$, 即 $AE \cdot CM = AD \cdot BC$ ① 又 Rt$\triangle ADC \backsim$ Rt$\triangle CDB$, 有 $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CB}$, 故 $AC \cdot CD = AD \cdot BC$ ②

由①, ②可得 $AE \cdot CM = AC \cdot CD$.

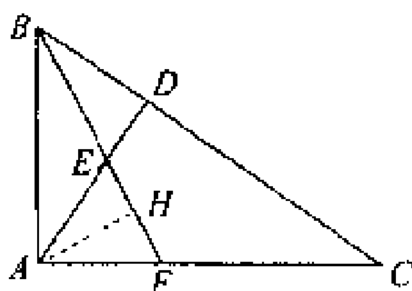
10. **证明**　在 Rt△ADB 中，$DE \perp AB$，根据射影定理，有 $DE^2 = AE \cdot BE$.

在 Rt△GBE 和 Rt△HAE 中，$\angle GBE = \angle AHE$，故 Rt△BGE∽Rt△HAE. 于是 $\frac{GE}{AE} = \frac{BE}{HE}$，即 $BE \cdot AE = GE \cdot HE$.

所以 $DE^2 = EG \cdot EH$.

11. **证明**　因 $\angle EAD = \angle DCF = 60°$，且由 $AD \parallel BC$ 知 $\angle EDA = \angle DFC$，故△ADE∽△CFD，有 $\frac{AE}{AD} = \frac{CD}{CF}$. 进而可得 $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF}$. 又 $\angle EAC = \angle ACF = 120°$，所以△$ACE$∽△$CFA$，可得 $\angle FAC = \angle CEA$. 又 $\angle ACE$ 公共，所以△CAM∽△CEA. 由此可得 $CA^2 = CE \cdot CM$.

12. **证明**　在△BDE 与△BAF 中，因 $\angle BDE = \angle BAF = 90°$，$\angle DBE = \angle ABF$，所以 $\angle AFB = \angle DEB$. 又因 $\angle DEB = \angle FEA$，所以 $\angle AFE = \angle AEF$，可得 $AE = AF$.



(第 12 题)

作 $AH \perp EF$ 于 H(如图)，则有 $EH = HF = \frac{1}{2}EF$.

在 Rt△ABF 中，$AH \perp BF$，所以根据射影定理，可得 $AF^2 = HF \cdot BF$. 进而有 $EF = 2HF = \frac{2AF^2}{BF}$.

在 Rt△ABC 中，$AD \perp BC$，所以 $AC^2 = CD \cdot BC$，有 $DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{2}{BC}$.

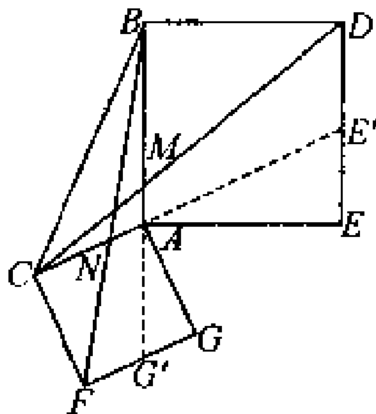
因 BF 平分 $\angle BAC$，有 $\frac{BA}{BC} = \frac{AF}{CF}$. 又因 $BF > BA$，所以

$$\frac{EF}{DC} = \frac{AF^2 \cdot BC}{BF} < \frac{AF^2 \cdot BC}{BA} = AF^2 \cdot \frac{CF}{AF} = AF \cdot CF.$$

13. **证明**　设正方形 $ABDE$ 的边长为 a，正方形 $AGFC$ 边长为 b.

(1) 当 $\angle BAC = 90°$ 时，显然有 $\frac{AM}{DE} = \frac{AC}{CE}$，故 $AM = \frac{AC \cdot DE}{CE} = \frac{ab}{a+b}$；同理 $AN = \frac{ab}{a+b}$，故 $AM = AN$.

(2) 当 $AM = AN$ 时，若 $\angle BAC \neq 90°$，如图，延长 CA 交 DE 于 E'，延长 BA 交 FG 于 G'，易证△AEE'∽△AGG'，故有 $\frac{AE'}{AG'} = \frac{EE'}{GG'} = \frac{AE}{AG} = \frac{a}{b}$，$AE' = \frac{a}{b}AG$，$EE' = \frac{a}{b}GG'$.



(第 13 题)

由$\frac{AM}{DE'}=\frac{AC}{CE'}$得

$$AM=\frac{AC\cdot DE'}{CE'}=\frac{b\cdot(a-EE')}{a+AE'}=\frac{b\left(a-\frac{a}{b}GG'\right)}{a+\frac{a}{b}AG'}=\frac{b(b-GG')}{b+AG'}$$

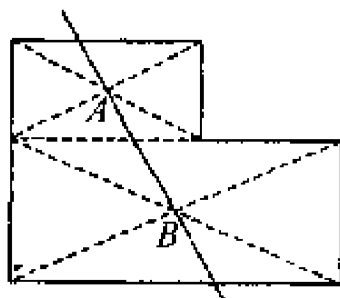
由$\frac{AF}{FG'}=\frac{AB}{BG'}$得

$$AN=\frac{AB\cdot FG'}{BG'}=\frac{a(b-GG')}{a+AG'},$$

从而有$\frac{b}{b+AG'}=\frac{a}{a+AG'}$，得 $a=b$，与已知条件矛盾. 故$\angle BAC=90°$.

练习二十三

1. **解**　如图，将钢板分成两个矩形. 两矩形对角线交点 A、B 为两矩形对称中心，直线 AB 将两矩形均分成等积二部分，从而将整块钢板分成等积两部分.



(第 1 题)

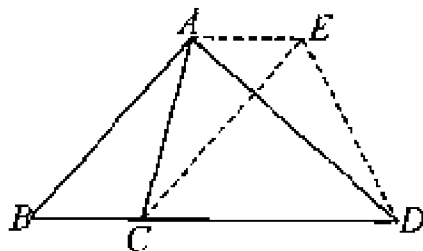
2. **解**　欲取胜，首先要争取先放，并把第一枚硬币放在桌面的对称中心(对角线交点)处. 以后应该根据对方所放硬币的位置，在这个位置关于中心对称的位置上放下同样大小的一枚硬币. 这样做，根据对称性，只要对方能放得下一枚硬币，就能保证自己在对称位置上放下同样大小的硬币，最终必能获胜.

3. **解**　将 AB 平移至 CE，连结 AE、DE. 依题设

$\angle ACD=\angle B+\angle BAC=40°+30°=70°$,

$\angle ECD=\angle B=40°$.

又 $CD=AB=CE$，故$\angle EDC=\frac{1}{2}(180°-40°)=70°$，所以四边形 $ACDE$ 为等腰梯形，有$\angle ADB=\angle ECD=40°$.



(第 3 题)

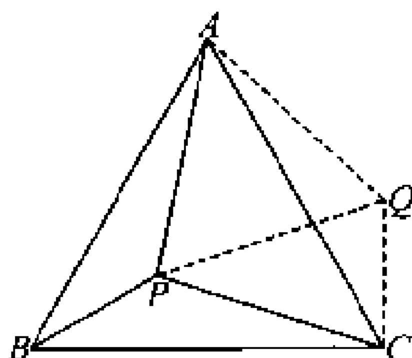
4. **证明**　(1) AC、BD 都关于 O 为中心对称，有 $OA=OC$，$OB=OD$，从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 A、D 关于 MN 成轴对称，$OA=OD$，进而知 $AC=BD$，故四边形 $ABCD$ 是矩形.

(2) EF 关于 MN 成轴对称，有 $OE=OF$，即 E、F 关于 O 成中心对称，又 A

与 C、B 与 D 均关于点 O 成中心对称,故△ABE 和△CDF 关于 O 成中心对称.又 A 与 D,B 与 C 关于 MN 成轴对称,故△ABE 与△DCF 关于 MN 成轴对称.

(3)由(2)知△ABE≌△DCF.注意到 AE 与 CF 关于 O 成中心对称,BE 与 CF 关于 MN 成轴对称,所以 $AE=CF=DE$,△ABE 为等腰三角形.同理△DCF 也要等腰三角形.

5.**证明** 以 A 为中心,将△ABP 顺时针旋转至△ACQ.连结 PQ,则 $AP=AQ$,$\angle APQ=\angle AQP$,$\angle APB=\angle AQC$,又 $\angle APB>\angle APC$,故 $\angle AQC-\angle AQP>\angle APC-\angle APQ$,即 $\angle PQC>\angle QPC$,可得 $PC>CQ$.即 $PC>PB$.



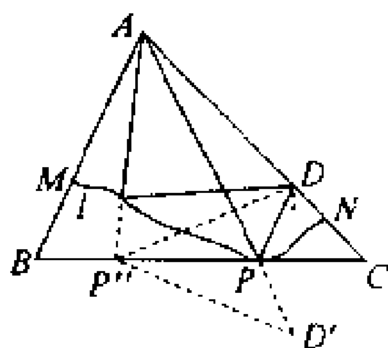
(第 5 题)

6.**证明** 作 D 关于 BC 的对称点 D',连结 DD'、PD',延长 AP' 交 BC 于 P'',连结 DP''、$D'P''$.显然有 $DP''=D'P''$,$DP=D'P$,$\angle DPC=\angle D'PC$.因

$$AP''+P''D=AP'+PP''+P''D>AP'+P''D,$$

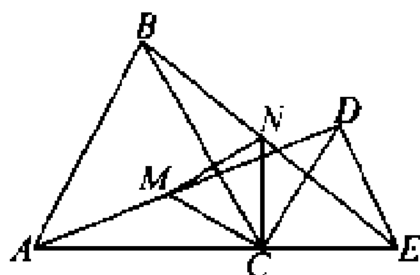
且 $$AP'+P'D>AP+PD,$$

故 $AP''+P''D>AP+PD$.从而 $AP''+P''D>AP+PD'$,即 P 是 BC 上各点中到 A、D' 距离之和最小的点,应有 A、P、D' 三点共线.从而 $\angle APB=\angle D'PC$,于是 $\angle APB=\angle DPC$.

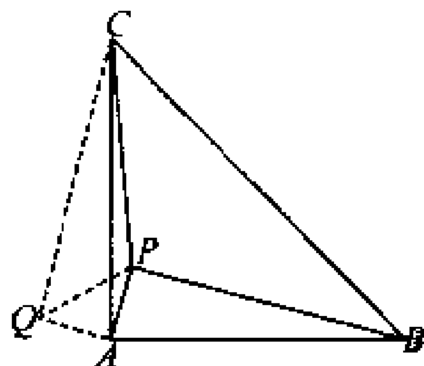


(第 6 题)

7.**证明** 将线段 BE 绕点 C 逆时针旋转 $60°$,则 B 点落至 A 处,E 点落至 D 处,故点 N 落至 M 处,这表明 $CN=CM$,$\angle NCM=60°$,故△CMN 为等边三角形.



(第 7 题)



(第 8 题)

8.**解** 如图,将△APB 绕点 A 逆时针旋转 $90°$,AB 至 AC 处,P 至 Q 处.则 $AP=AQ$,$\angle PAQ=90°$.于是 $PQ=\sqrt{2}AP=\sqrt{2}$,$\angle APQ=45°$,在△PCQ 中,$CQ=$

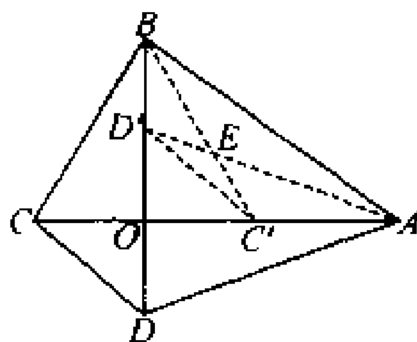
$PB=3$,故

$$PC^2+PQ^2=7+2=3^2=CQ^2,$$

根据勾股定理的逆定理,得$\angle CPQ=90°$.于是

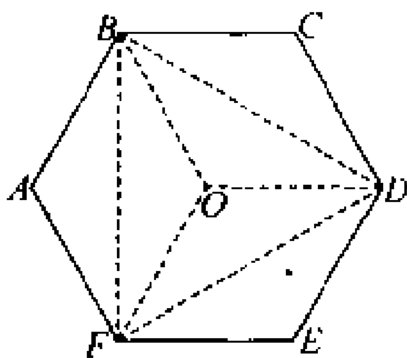
$\angle CPA=\angle QPA+\angle QPC=45°+90°=135°$.

9.**证明** 因$AC\perp BD$,且$OA>OC,OB>OD$,故C关于BD的对称点C'在OA上,D关于AC的对称点D'在OB上.连结AD'、BC'、$C'D'$.设AD'、BC'交于E,则$C'D'=CD,AD'=AD,BC'=BC$.于是$BE+AE>AB,EC'+ED'>C'D'$,故$BC'+AD'>AB+C'D'$,即$BC+AD>AB+CD$.

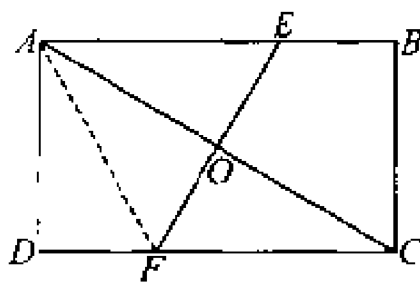


(第9题)

10.**证明** 如图,连BD、BF、DF.因$\triangle ABF$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$是腰长都相等的等腰三角形,且$\angle A+\angle C+\angle E=\frac{1}{2}\times720°=360°$,因此,$\triangle ABF$、$\triangle CDB$、$\triangle DEF$可以将顶点$A$、$C$、$E$汇聚于一点,拼成一个新三角形,该三角形与$\triangle BDF$全等.这相当于分别以$BF$、$BD$、$DF$为对称轴作对称变换,$A$、$C$、$E$交于点$O$,则四边形$ODCB$、$OBAF$、$OFED$都是菱形.于是$AB\parallel OF\parallel DE,AF\parallel BO\parallel CD$,故$\angle A=\angle CDE$.



(第10题)



(第11题)

11.**解** 如图,AC为折痕EF的垂直平分线.连结AF,则$FA=FC$.

在$\text{Rt}\triangle ABF$中,$AD=9$,$DF=12-FC=12-AF$,根据勾股定理,有$AD^2+DF^2=AF^2$,即

$$AF^2=9^2+(12-AF)^2,$$

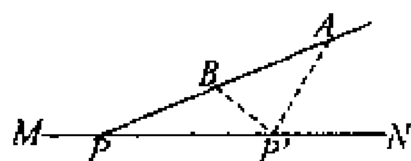
解得$AF=\frac{75}{8}$.

因$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$,故$AO=\frac{15}{2}$,于是

$$OF=\sqrt{AF^2-AO^2}=\sqrt{(\frac{75}{8})^2-(\frac{15}{2})^2}=\frac{45}{8}.$$

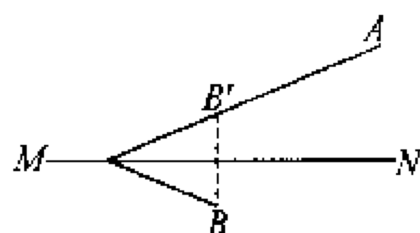
所以折痕 $EF=2OF=\frac{45}{4}$.

12.**解** (i)当 A、B 在直线 MN 的同侧时，由于 A、B 到 MN 的距离不相等，故 AB 与 MN 不平行. 连结 AB 并延长 MN 于点 P(如图(1))，则点 P 为所求. 事实上，在直线 MN 上另取一点 P'，连结 $P'A$、$P'B$. 在 $\triangle AP'B$ 中，$|P'A-P'B|<AB$. 可见 $|P'A-P'B|<|PA-PB|$.



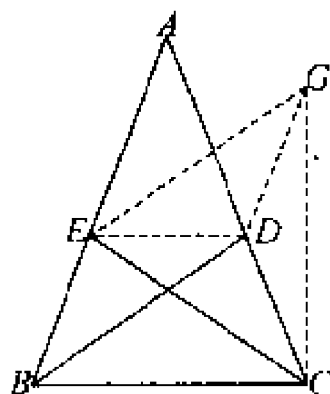
(第 12 题)(1)

(ii)当 A、B 位于直线 MN 的两侧时，作点 B 关于直线 MN 的对称点 B'. 由于 A、B 到直线 MN 的距离不等，故 A、B' 到直线 MN 的距离不等，AB' 与 MN 不平行. 连结 AB' 并延长关 MN 于点 P，则点 P 为所求. 事实上，$|PA-PB|=|PA-PB'|$. 由(i)知 $|PA-PB'|$ 最大，因此，$|PA-PB|$ 最大.



(第 12 题)(2)

13.已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle ACB$，$BD=CE$. 求证：$AB=AC$.



(第 13 题)

证明 将 BE 平移至 DG，连 EG、ED、GC(如图)，则 $EG=BD$. 又 $BD=EC$，故 $EG=EC$，$\angle ECG=\angle EGC$.

假若 $\angle ABC\neq\angle ACB$，不妨设 $\angle ABC>\angle ACB$. 因 $\angle DGE=\angle EBD=\frac{1}{2}\angle ACB$，$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB$，故 $\angle DGE>\angle DCE$. 于是 $\angle DGC<\angle DCG$. 所以 $DC<DG$. 进而知 $DC<BE$.

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle CBE$ 中，$BC=CB$，$BD=CE$，而 $DC<BE$，故 $\angle DBC<\angle BCE$，于是 $\angle ABC<\angle ACB$，矛盾. 因此 $\angle ABC=\angle ACB$.

[General Information]

□□=□□□□□□□□□□

□□=

□□=240

SS□=0

□□□□=

Vss□=88262383